Empirische Geometrie und Raum-Zeit-Theorie in mengentheoretischer Darstellung

Balzer, Wolfgang

Wolfgang Balzer

Empirische Geometrie und Raum-Zeit-Theorie in mengentheoretischer Darstellung

Monographien
Wissenschaftstheorie und Grundlagenforschung 9

Wolfgang Balzer

Empirische Geometrie und Raum-Zeit-Theorie in mengentheoretischer Darstellung

Scriptor Verlag Kronberg/Ts.
1978

Bei dem vorliegenden Büchlein handelt es sich um meine Dissertation, die ich 1975 und 1976 unter Anleitung von Prof. Stegmüller an der Universität München anfertigte.
Zwei Fußnoten konnten aus drucktechnischen Gründen nicht mehr im Text untergebracht werden. Sie finden sich auf Seite 185. Der Verweis im Text erfolgt durch die Zeichen ① und ②.

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Balzer, Wolfgang
Empirische Geometrie und Raum-Zeit-Theorie in mengentheoretischer Darstellung. – 1. Aufl. – Kronberg/Ts. : Scriptor-Verlag, 1978. – (Monographien : Wissenschaftstheorie u. Grund= lagenforschung ; Bd. 9)
ISBN 3-589-20649-7

Druck und Bindung: Friedrich Pustet, Regensburg
Printed in Germany
ISBN 3-589-20649-7

Inhalt

EINLEITUNG

Carnap vertrat die Idee einer Vereinheitlich=ung der empirischen Wissenschaften: Alle ihre Begriffe und Sätze sollten auf allgemeinver=ständliche und überprüfbare Tatsachen zurück=geführt werden.Trotz der zum Teil berechtigten Kritik,die sich gegen Carnaps eigene Vorschläge (etwa in (4)) zur Durchführung dieses Programms richtete,ist die Idee bis heute lebendig geblie=ben.Sicher wäre es falsch zu sagen,daß viele Philosophen heute ihre Arbeit an diesem Programm ausrichten.Auch die Behauptung,daß die genannte Idee ein regulatives Prinzip in der wissenschafts=theoretischen Forschung sei,wird gegenwärtig kaum akzeptiert werden.Aber viele Forscher aus Philosophie und anderen Disziplinen tragen heute ungewollt zu diesem Programm bei.So inter=essieren sich Psychologen und Soziologen für die Entwicklung der Intelligenz,das Erlernen der Sprache und die Einführung neuer Begriffe, Biologen untersuchen die Struktur unserer sinn=lichen Wahrnehmung und Logiker und Informatiker entwickeln subtile formale Beschreibungsmittel. Philosophen unterschiedlicher Richtungen be=mühen sich,die Gebäude der Wissenschaften all=gemein zu beschreiben und die wissenschaftlichen Aktivitäten so zu analysieren,daß sie Schritt für Schritt verstanden werden können.

Solche Wissenschaft über den Gegenstand "Wissenschaft" -von Stegmüller "zweite Rationalisierung" genannt- wird gegenwärtig in zwei Richtungen betrieben,die sich hauptsäch=lich durch die Methode unterscheiden.

In der einen Richtung versucht man,das Ge=

bäude einer Einzelwissenschaft von unten nach oben,von einer soliden Basis aus,lückenlos und zirkelfrei zu rekonstruieren.Die grundlegenden Begriffe werden dabei an vortheoretischen Er= fahrungen und durch die alltägliche Umgebung induzierten Normen festgemacht.Auf diesen Grundbegriffen aufbauend werden sukzessive weitere Begriffe "definiert",wobei definieren hier nicht im logisch-syntaktischen Sinne, sondern in einem an Handlungen gebundenen,prä= skriptiven Sinne gemeint ist.Wir nennen die zugrundeliegende Methode kurz: Rekonstruktion von der Basis aus.Um Verwechslungen zu vermei= den,wurde das Wort logisch bewußt weggelassen.

Die andere Richtung analysiert das Gebäude einer Wissenschaft nach einer in den Natur= wissenschaften gebräuchlichen Methode.Es werden Hypothesen über einen bestimmten Gegenstandsbe= reich (hier etwa Fachliteratur und Wissenschafts= betrieb) formuliert und durch positive Beispiele bestätigt oder durch Gegenbeispiele erschüttert. Man macht dabei ausgiebig Gebrauch von formalen Hilfsmitteln und logischen Rekonstruktionen.Wir nennen die hier verwandte Methode kurz: Logische Rekonstruktion vorgegebenen Materials.

Wenn man unterstellt,daß Vertreter der zweiten Richtung ein Interesse am empiristischen Programm haben,so ist beiden Richtungen mindestens ein Ziel gemeinsam,nämlich,genau zu verstehen,wie und warum Einzelwissenschaften funktionieren. Und um letztmals zu vergröbern: Bei Voraus= setzung des gemeinsamen Zieles läßt sich die oben geschilderte Differenz in der Methode so zusammenfassen.Die Einen versuchen ihr Ziel systematisch von unten her anzusteuern,während die Anderen sich ihm von mehreren Richtungen her nähern.

Die sich zuallererst für eine Untersuchung anbietende Einzelwissenschaft ist die klassische Physik und hier wiederum speziell die Partikel= mechanik.Zum Einen ist diese Theorie bestens bestätigt (trotz Relativitätstheorie),zum Anderen liegt sie bereits in einer von den Physikern ausgearbeiteten,teilweise axiomatisierten Form vor.Aufbauend auf Arbeiten von Adams (1), McKinsey,Sugar und Suppes (13) und Simon (19) entwickelte Sneed in (20) einen allgemeinen Be= griff der "physikalischen Theorie",der stark an der klassischen Partikelmechanik orientiert ist. Dieser Begriff stellt einen ersten erfolgreichen Ansatz dar,den Erfordernissen empirischer Wissenschaften durch Veränderung des Begriffs der "Theorie",wie er bisher in der mathematischen Logik benutzt wurde,gerecht zu werden.Ein Charakteristikum des Sneedschen Begriffs ist die mengentheoretische Formulierung im Unterschied zu logisch-syntaktischen Formulierungen,wie sie lange Zeit üblich waren.Die mengentheoretische Formulierung erlaubt eine relativ übersichtliche Darstellung auch komplexerer Theorien.Ihre Be= nutzung setzt jedoch keineswegs voraus,daß man die axiomatische Mengenlehre als richtige Theorie anerkennen muß.Sneed und anschließend Stegmüller (22) bestätigten den neuen Theorienbegriff zu= nächst am Beispiel der klassischen Partikel= mechanik,Moulines (14) konnte die Thermo= dynamik darunter subsumieren.

Ein Vertreter der oben beschriebenen ersten

Richtung wird gegen diese Untersuchungen ein=wenden,man habe beim Bau des Hauses mit dem dritten Stockwerk angefangen,diese Theorien hingen in der Luft,man gehe nicht von einer zu=verlässigen Basis aus.Hierauf ist zu antworten, daß dies eine Folge der oben beschriebenen Methode ist.

Es muß jedoch zugegeben werden,daß hiermit ein Problem angeschnitten ist,welches bei einer Rekonstruktion von der Basis her nicht auftritt und welches wir das Problem der Hierarchienbildung nennen wollen.Trotz der intuitiv überzeugenden Darstellungen in (20) und (22) und der erfolgreichen Anwendung des Sneed=schen Theorienbegriffs auf einige Beispiele wurde nämlich bis jetzt die Frage,wie mehrere Theorien im Rahmen einer Spezialwissenschaft aufeinander aufbauen,noch nicht ernsthaft ange=gangen.

Das Problem in seiner allgemeinen Form lautet: Wie werden gewisse Begriffe einer Theorie von einer anderen,"höheren" Theorie aufgenommen und vorausgesetzt? Eine Lösung dieses Problems ist von besonderem Interesse für das empiristische Programm: Eine befriedigende Explikation des Begriffs der Zurückführbarkeit wird ohne eine solche Lösung nicht möglich sein.Am Beispiel der Mechanik läßt sich dies genauer darstellen.

Die Mechanik benutzt den Begriff der Orts=funktion,der aus der Kinematik,auf der die Mechanik aufbaut,vorausgesetzt wird.Man fragt sich,welche tieferliegende Theorie ihrerseits den Begriff der Ortsfunktion liefert.Denn die

Aussage,daß "X eine Ortsfunktion ist",ist keine Aussage,deren Bedeutung man ohne Weiteres ver= stehen kann in dem Sinn wie man etwa "X ist ein Apfel" versteht.Denn eine Ortsfunktion ist kein "konkretes" Objekt,sondern eine sehr theoretische Entität.Man braucht also eine "Theorie der Partikelkinematik",um "X ist eine Ortsfunktion" zu verstehen.Es fragt sich nun weiter,auf welchen Begriffen diese Theorie der Partikel= kinematik fußt und so fort.Gibt es eine allge= meine Charakterisierung solcher Übereinander= schichtung von Theorien? Unsere Antwort lautet: Ja.

Zur Lösung der beiden angesprochenen Probleme, des Problems der unzureichenden Verankerung bis= heriger logischer Rekonstruktionen in der vor= wissenschaftlichen Erfahrung und des Problems der Hierarchienbildung,liegt es auf der Hand, eine logische Rekonstruktion der der Partikel= mechanik zugrundeliegenden Theorien zu versuchen. Diese sind: Die Partikelkinematik und,so be= haupten wir,darin enthaltene Theorien von Raum, Zeit und Raum-Zeit.Das Ziel unserer Arbeit ist es, diese Theorien in dem mengentheoretischen Formalismus von Sneed zu rekonstruieren.

Da solche Rekonstruktionen fast immer dem Einwand der Inadäquatheit ausgeliefert sind, wollen wir in aller Behutsamkeit nur Folgendes beanspruchen: Wir entwickeln in präziser Weise einen möglichen Weg,um von elementaren Grundbe= griffen wie "Partikel","später als" etc. zu Grundbegriffen der Mechanik wie "Ort" und "Zeit" zu gelangen und dabei alle nötigen Systematisierungen explizit zu machen.

Diese Arbeit ist ein erster Versuch,neue und präzise Begriffe auf alte und sehr verschieden beurteilte Theorien anzuwenden.Wenn wir auf einige der mit diesen Theorien verbundenen alten Probleme etwas Licht werfen können,so ist der Zweck unserer Schrift erreicht.

I ALLGEMEINE BEGRIFFE

Die präzise Beschreibung von Sachverhalten,die so kompliziert sind wie die,mit denen wir uns beschäftigen werden,ist ohne Benutzung einer formalen Sprache unmöglich.Wir benutzen die Sprache der Mengenlehre.

Als Art der Axiomatisierung einer Theorie verwenden wir die Axiomatisierung durch Angabe eines informellen mengentheoretischen Prädikats (vergleiche Stegmüller (22),S.39 ff).Die Bedeutung der Symbole der Mengenlehre einschließlich Logik wird als bekannt vorausgesetzt.Diese Symbole sind bei uns: $\in$, $\{\ \}$, $[\ ]$, $\cap$, $\cup$, $\subseteq$, $\subset$, $=$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$.Weitere Abkürzungen und die Symbolik betreffende Vereinbarungen sind in folgender Definition zusammengefaßt.

D1 1) $M \in \mathfrak{M}$ $\equiv$ M ist eine nicht-leere Menge

2) Pot(M) $\equiv$ die Potenzmenge von M

3) Rel(M) $\equiv$ M ist eine Relation

4) Ob(M) $\equiv$ M ist eine Menge von Objekten (dabei zählen Paare von Objekten wieder als Objekte) (1)

5) $\emptyset$ $\equiv$ die leere Menge

6) $f:M\rightarrow N$ $\equiv$ f ist eine Funktion von M nach N

7) $f:M\hookrightarrow N$ $\equiv$ $f:M\rightarrow N$ ist injektiv

8) Bij(f) $\equiv$ f ist bijektiv

9) $f\in\mathcal{C}^2$ $\equiv$ f ist zweimal stetig differenzierbar

10) $\mathbb{N}$ $\equiv$ die Menge der natürlichen Zahlen 0,1,2,3,...

11) $\mathbb{R}$ $\equiv$ die Menge der reellen Zahlen

12) Für $n \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathfrak{M}$ sei M^n das n-fache kartesische Produkt von M

13) Für $r:M \rightarrow N$ sei $\bar{r}:Pot(M) \rightarrow Pot(N)$ definiert durch
$\bar{r}(X) := \{r(x)/x \in X\}$ für $X \subseteq M$

14) Für $x = [x_1,..,x_n] \in M^n$ und $1<i<n$ sei
$pr_i(x) := x_i$

15) $\vec{o} \equiv [0,0,0] \in \mathbb{R}^3$

16) $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3$ bezeichnen respektive die Vektoren $[1,0,0]$, $[0,1,0]$ und $[0,0,1] \in \mathbb{R}^3$

17) $\bigcup\{M_i/i \in I\} \equiv \bigcup_{i \in I} M_i$

18) $\bigcup\{M_i/A(i)\} \equiv \bigcup_{A(i)} M_i$

19) $\forall x \in M(A(x)) \equiv \forall x(x \in M \rightarrow A(x))$

20) $\exists x \in M(A(x)) \equiv \exists x(x \in M \wedge A(x))$

21) $Int(M) \equiv M \subseteq \mathbb{R} \wedge \exists a,b \in \mathbb{R} \ (M=\{x/a<x<b\})$

22) $\iota x A(x) \equiv$ "Dasjenige x,welches die Eigen= schaft A besitzt"

23) Für $f:M \rightarrow \mathbb{R}^n$ schreiben wir $f=[f_1,..,f_n]$ mit $f_i:M \rightarrow \mathbb{R}$ und $f(x)=[f_1(x),..,f_n(x)]$

24) Für $x=[x_1,..,x_n]$ und $y=[y_1,..,y_n] \in \mathbb{R}^n$ sei
$\|x-y\| := (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

25) $\exists! x A(x) \equiv \exists x A(x) \wedge \neg \exists y(y \neq x \wedge A(y))$

Wir skizzieren nun kurz die mengentheoretischen Begriffe,die Sneed zur Beschreibung von physikalischen Theorien vorgeschlagen hat. Dabei übernehmen wir im Wesentlichen die Dar= stellung von Stegmüller in (22).In einigen Punkten scheinen uns kleine Änderungen ange= bracht.

D2 X ist eine m+k-Matrix gdw

1) $X \in \mathcal{M}$

2) $m,k \in \mathbb{N}$, $0<m$ und $0 \leq k$

3) $x \in X$ gdw es $n_1,..,n_m,t_1,..,t_k$ gibt, sodaß

3.1) $x=[n_1,..,n_m,t_1,..,t_k]$

3.2) $n_1,..,n_m,t_1,..,t_k \in \mathcal{M}$

Die Elemente einer m+k-Matrix sind diejenigen Entitäten, über die in physikalischen Büchern geredet wird. Im Fall der klassischen Partikelmechanik z.B. ist $m=3$ und $k=2$. Die 3+2-Matrix der klassischen Partikelmechanik besteht aus Tupeln $[P,T,s,m,f]$, wobei P eine endliche Menge (von "Partikeln"), T ein reelles Intervall (das die "Zeit" darstellt) und $s:P \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$, $m:P \rightarrow \mathbb{R}$ und $f:\mathbb{N} \times P \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$ Funktionen (die Orts-, Masse- und Kraftfunktion) sind. Wenn man Funktionen, wie es in der Mengenlehre üblich ist, einschließlich ihres Definitions- und Wertbereiches durch eine einzige Menge darstellt, so hat ein solches Tupel die Gestalt von D2-3.1. Es kommt uns nicht darauf an, in der Definition den Unterschied zwischen "bloßen" Mengen und "richtigen" Relationen in den Komponenten eines Matrixelementes sichtbar zu machen. Wir nehmen an, daß diese Unterscheidung im speziellen Fall jeweils leicht zu treffen ist. Es ist jedoch wichtig, zwischen theoretischen und nicht-theoretischen Termen zu unterscheiden. Die Ersten bezeichnen wir mit t_i, die Letzten mit n_i.

D3 a) Ein Constraint für $M \in \mathcal{M}$ ist eine Menge C mit den Eigenschaften

1) $\emptyset \neq C \subseteq Pot(M)$

2) $\forall x(x \in M \rightarrow \{x\} \in C)$

b) Ein Constraint für M heißt <u>transitiv</u> gdw $\forall X,Y \in Pot(M)(X \in C \wedge Y \subseteq X \rightarrow Y \in C)$

c) Es sei M_p eine m+k-Matrix,i$\leq$ m+k und die i-te Komponente von $x \in M_p$ sei eine n-stellige Relation.Der <u>(=,=)-Constraint</u> $C_=$ auf M_p für die i-te Komponente x_i ist definiert durch

$$X \in C_= \leftrightarrow \forall x,y \in X \forall [a_1,..,a_n]((\forall k \leq n \exists j \leq n (a_k \in pr_j(x) \cap pr_j(y)) \rightarrow (a_1,..,a_n \in pr_i(x) \leftrightarrow a_1,..,a_n \in pr_i(y)))$$

Diese Begriffe lassen sich leichter im Anschluß an die folgende Definition erläutern.

<u>D4</u> Ein <u>Kern</u> ist ein Tupel $[M_{pp},M_p,M,C]$ mit den Eigenschaften

1) Es gibt m und k,sodaß M_p eine m+k-Matrix ist
2) $M_{pp}=\{[n_1,..,n_m] / \exists t_1,..,t_k([n_1,..,n_m,t_1,..,t_k] \in M_p)\}$
3) $M \subseteq M_p, M \in \mathfrak{M}$
4) C ist ein Constraint für M_p

Ausgehend von einer m+k-Matrix M_p,deren Elemente wir auch als potentielle Modelle bezeichnen,erhält man einen Kern auf folgende Weise.Von jedem potentiellen Modell werden die theoretischen Größen weggenommen.Die so erhaltenen Entitäten bilden die Menge M_{pp} (D4-2),deren Elemente auch partielle potentielle Modelle genannt werden. Auf die mit der Theoretizität verknüpften Probleme werden wir hier nicht eingehen.Es wird vorausgesetzt,daß man sich im jeweiligen Fall entscheiden kann,welche Größen als theoretisch und welche als nicht-theoretisch zu betrachten sind.

Durch M_{pp} und M_p werden rein formal gewisse Entitäten ausgezeichnet,über die die Theorie möglicherweise reden kann.Unter diesen können durchaus unvernünftige oder für die Theorie irrelevante Entitäten vorkommen.So gibt es z.B. in der Partikelmechanik potentielle Modelle,bei denen die Partikelmenge aus abstrakten Entitäten, etwa Zahlen,besteht.

M wird als die Menge der Modelle bezeichnet. Die kennzeichnenden Eigenschaften der Modelle sind es,die in Physikbüchern häufig als Axiome bezeichnet werden.So sind z.B. in der Partikel=mechanik die Modelle dadurch charakterisiert, daß sie die Newtonschen Gesetze oder Axiome erfüllen.

Die Menge C schließlich,der Constraint,ist zunächst formal eine Menge potentieller Modelle. Die Aufgabe von C ist es,gewisse solche Mengen auszuschließen.Derartige unerwünschte Mengen werden dann formal einfach nicht in die Menge C aufgenommen.Wenn wir für den Moment die Elemente von C als Modellkombinationen bezeichnen,so läßt sich die Aufgabe von C kurz so formulieren: C verbietet gewisse Modellkombinationen.D3-a2 stellt sicher,daß nur "echte" Kombinationen ausgeschlossen werden.Jede einelementige Menge $\{x\}$ ist keine echte Kombination und liegt daher in C.D3-b ist eine Forderung,die von vielen Constraints erfüllt wird und die für die Richtigkeit einiger Überlegungen in (20) und (22) gebraucht wird.Sowohl bei Moulines (14), als auch bei Untersuchungen über invariante

Theorien und in der vorliegenden Schrift gibt es jedoch nicht-transitive Constraints,sodaß wir den Begriff der Transitivität nicht in die Definition der Theorie aufnehmen.Die Bedeutung des (=,=)-Constraints läßt sich am Besten durch ein Beispiel erklären.Es sei in der Mechanik eine Menge potentieller Modelle gegeben und ein Partikel komme in mehreren dieser potentiellen Modelle vor,habe aber in jedem potentiellen Modell eine andere Masse.Eine derartige Kombination ist nicht zulässig,also die be= treffende Menge kein Element von $C_=$.Positiv ausgedrückt: Der (=,=)-Constraint verlangt,daß gleiche Objekte in verschiedenen potentiellen Modellen die gleichen Funktionswerte besitzen bzw.die gleichen Relationen erfüllen.Dies ist in D3-c allgemein für Relationen formuliert.Ist die i-te Komponente $x_i=pr_i(x)$ eines Elementes $x \in M_p$ eine n-stellige Relation,so trifft sie auf Objekte $a_1,..,a_n$ in allen potentiellen Modellen gleichermaßen zu,in denen diese Objekte vor= kommen.

<u>D5</u> Es sei $K=[M_{pp},M_p,M,C]$ ein Kern mit m+k-Matrix M_p.

a) $r:M_p \to M_{pp}$ wird definiert durch

$r([n_1,..,n_m,t_1,..,t_k]):=[n_1,..,n_m]$

b) $A(K):=\bar{\bar{r}}(Pot(M) \cap C)$

Die Funktion r hackt von jedem potentiellen Modell die theoretischen Größen ab.r ist relativ zu K definiert.Diese Abhängigkeit werden wir im Allgemeinen gemäß der Indexkon= vention D7 ausdrücken.A(K) ist die Menge aller

Teilmengen von M_{pp},die sich durch theoretische Größen so zu Modellmengen ergänzen lassen,daß diese ergänzten Mengen den Constraint erfüllen. Bei $\bar{\bar{r}}$ wurde D1-13 zweimal angewandt.

<u>D6</u> a) Eine <u>Theorie</u> ist ein Paar $[K,I]$ mit den Eigenschaften

1) K ist ein Kern,$K=[M_{pp},M_p,M,C]$
2) $I \subseteq M_{pp}$

b) Ist $T=[K,I]$ eine Theorie,so ist die <u>empirische Behauptung</u> von T der Satz $I \in A(K)$

c) Für eine Theorie $T=[K,I]$ mit K wie in a) sei
$\mathbb{M}(T):=Pot(M) \cap C$

Die Menge I heißt die Menge der intendierten An= wendungen der Theorie.Die Elemente von I sind partielle potentielle Modelle (D6-a2) und zwar nur solche,über die die Theorie auch tatsächlich redet.I beschreibt also den nicht-theoretischen Bereich,auf den die Theorie angewendet wird.I wird nicht formal,sondern paradigmatisch festge= legt (vergleiche (22),S.198 ff).Eine Theorie wird wie folgt benutzt.Der nicht-theoretische Anwendungsbereich I ist vorgegeben.Man weiß,daß $I \subseteq M_{pp}$ ist.Mit Hilfe des Kerns K wird nun aus $Pot(M_{pp})$ eine Teilmenge ausgesondert,nämlich die Menge derjenigen Mengen partieller potentieller Modelle,die sich,wie es der Kern vorschreibt, mittels theoretischer Größen beschreiben und "erklären" lassen.Man muß herausfinden,ob I eine dieser Menge ist,d.h.ob I in A(K) liegt. Falls dies richtig ist,muß I eine gewisse

Struktur besitzen,die durch die Theorie fest=gelegt ist.Der Satz,daß I diese Struktur be=sitzt,also der Satz $I \in A(K)$,heißt die empirische Behauptung von T (D6-b).In D6-c wird das Analogon zu A(K) auf der theoretischen Ebene definiert.

Die restlichen in (20) und (22) benutzten Begriffe brauchen wir hier nicht.Es folgt eine nützliche Vereinbarung zur Benutzung von Indizes.

D7 a) Bezeichnet X_i ein n-Tupel mit bestimmten Komponenten,so versehen wir diese Komponenten mit dem gleichen Index i

b) Wird nicht spezifiziert,was ein bestimmter indizierter Buchstabe bezeichnen soll,so ist stets gemeint,daß er die passende Komponente eines Tupels bezeichnet,für welches vorher eine genauso indizierte Bezeichnung angegeben wurde

c) Ist bei b) der Buchstabe nicht eine Kom=ponente eines Tupels,sondern nur mit Bezug auf ein solches Tupel definiert,so be=zeichnet er das relativ zu diesem Tupel Definierte

Ist z.B. K_i ein Kern,so wird die zugehörige Modellmenge mit M_i bezeichnet.Ist irgendwo von M_t die Rede und wurde vorher etwa T_t als Be=zeichnung für eine Theorie benutzt,so bezeichnet M_t die Modellmenge dieser Theorie.r_i bezeichnet die gemäß D5-a relativ zu einem Kern K_i definierte Funktion.

Mit dem Begriff der Theorie und den ihn um=gebenden Hilfsbegriffen können wir allgemein einen Aspekt der Bildung von Theorien= hierarchien beschreiben.Es gibt verschiedene Möglichkeiten,Theorien zu Hierarchien zu= sammenzufügen und übereinander zu bauen.Uns interessiert hier nur eine einzige Möglichkeit, bei der in einem Schritt eine Theorie T′ auf einer Theorie T aufbaut.Das soll heißen,daß einige der nicht-theoretischen Begriffe von T′ im Rahmen von T ihre Bedeutung gewinnen oder theoretische Terme von T sind.Natürlich kann man mehrere solcher Schritte hintereinander ausführen und so zu einer Hierarchie gelangen, in der sukzessive immer neue Terme eingeführt werden.Die Idee einer solchen Hierarchienkon= struktion -auch mit anderen als der hier betrachteten "Theoretisierungs-Relation"- wurde zuerst in (2) angedeutet.Wir verallge= meinern nun die in (2) definierte Relation der Theoretisierung in der Weise,daß auch <u>theoretische Objekte</u> als Ergänzungen nicht-theoretischer Objekte eingeführt werden dürfen.

<u>D8</u> Sind T und T′ Theorien,so heißt T′eine <u>Theoretisierung</u> von T gdw

1) Es gibt $k,m,n \in \mathbb{N}$,$m<n$,sodaß M_p und M'_p $k+m$- bzw. $k+n$-Matrizen sind

2) Es gibt $\delta: M'_p \to M_p$,sodaß

2.1) für alle $[x_1,..,x_{k+m},x_{k+m+1},..,x_{k+n}] \in M'_p$

$$\delta([x_1,..,x_{k+n}])=[x_1,..,x_{k+m}]$$

2.2) für alle $x \in M'$: $\delta(x) \in M$

3) Für alle $[x_1,..,x_{k+m},..,x_{k+n}] \in M'$gilt

$$\forall j \leq n-m(Ob(x_{k+m+j}) \to \exists i \leq k+m(Ob(x_i) \wedge \exists J: x_i \hookrightarrow x_{k+m+j}))$$

Die Theoretisierung T' entsteht also aus T durch Hinzunahme der theoretischen Größen $x_{k+m+1},..,x_{k+n}$.Die Funktion δ hackt diese neuen Größen von den Tupeln in M'_p wieder ab.D8-2.2 verlangt,daß die nicht-theoretischen Teile von Modellen von T'schon Modelle von T sind.Die stärkere Forderung,daß alle partiellen potentiellen Modelle von T' schon Modelle von T sind,erwies sich aus hier nicht darstellbaren Gründen als ungeeignet.Der interessante Teil dieser Forderung ist jedenfalls in D8-2.2 ent= halten: Die partiellen potentiellen Modelle von T',die sich zu Modellen ergänzen lassen,sollen schon Modelle von T sein.Auf diese Weise wird der Übergang zu höheren Theorien durch Einführung theoretischer Größen intuitiv befriedigend beschrieben.Bedingung D8-3 besagt,daß neuein= geführte Objektmengen Ergänzungen von Objekt= mengen von T sind.Wir stellen hierfür nur die ziemlich schwache Bedingung,daß sich die "alten" nicht-theoretischen Objekte in die neue Objekt= menge mittels einer injektiven Funktion J "ein= betten" lassen.

GEOMETRIE

II VORBEMERKUNGEN

Es mag intuitiv einleuchten,daß die Geometrie in der Raum-Zeit-Theorie eine Rolle spielt, weniger klar ist,welche Rolle sie spielt und ob eine Darstellung von Raum-Zeit-Theorien eine fertige,in sich abgeschlossene Darstellung der Geometrie voraussetzt.Tatsächlich wird man bei näherer Betrachtung der Abschnitte VII-IX feststellen,daß nicht alle Definitionen der Geometrie benötigt werden.Wenn wir hier auch auf einige spezifisch geometrische Probleme, die zur Darstellung von Raum-Zeit-Theorien nicht als gelöst vorauszusetzen sind,eingehen, so hat dies folgende Gründe.

1) Die Geometrie ist (oder kann aufgefaßt werden als) ein Standardbeispiel für die Ein=führung metrischer Begriffe.Speziell handelt es sich hier um den Begriff der Abstandsfunktion. Obwohl über das Thema Metrisierung in neuerer Zeit viel geschrieben wurde (vergleiche z.B.(9)), sind wir der Meinung,daß noch kein abschließend befriedigendes Bild über die Einführung metrischer Begriffe vorliegt.Als Alternative zum Ansatz von Suppes,der metrische Begriffe durch Repräsentationstheoreme einführt,stellen wir hier eine Rekonstruktion der Geometrie im Sneedschen Formalsimus zur Diskussion.Intuitiv ist der Unterschied zwischen beiden Ansätzen der.Nach Suppes muß jede Information,die sich aus der metrischen Größe gewinnen läßt,bereits

aus den Annahmen über die nicht-metrischen Größen folgen. Bei unserem Ansatz, in dem die metrische Größe als theoretischer Term einge= führt wird, kann sie zusätzliche Information liefern, welche sonst nicht zugänglich wäre.

2) Wenn auch nicht alle Definitionen der Geometrie für Raum-Zeit-Theorien verwendet werden, so können sie doch zum Verständnis der Raum-Zeit-Strukturen beitragen. Grob gesprochen ist nämlich eine Raum-Zeit-Struktur nichts anderes als eine Menge von mit einem Zeitindex versehenen Geometrien. Daß Definitionen und Axiome, in welche dieser Zeitindex eingeht, von denen der Geometrie abweichen, ist nicht ver= wunderlich. Es sei bemerkt, daß D16 bei Raum-Zeit-Theorien unverändert gebraucht wird und in dieser Definition werden fast alle technischen Hilfsmittel des folgenden Ab= schnitts verwandt.

3) Das in der Einleitung angesprochene Problem der Hierarchienbildung läßt sich beim jetzigen Erkenntnisstand unserer Meinung nach am Besten am Beispiel der Geometrie unter= suchen. Von hier aus sind zukunftweisende Lösungsvorschläge zu erwarten.

4) Aus einer Untersuchung der Geometrie können wir wertvolle Hinweise über die Rolle der Mathematik bei der Rekonstruktion physikalischer Theorien gewinnen. Die Geometrie nimmt eine Schlüsselstellung ein, denn genau im Anschluß an diese Theorie und aufbauend auf ihr wird die klassische Mathematik (und das

heißt hier: die Analysis) in die Physik ein=geführt. Bisherige Rekonstruktionen der Mechanik setzten stets die klassische Mathematik als Hilfsmittel unkritisch vor=aus. Sicher war dieses Vorgehen methodisch sehr fruchtbar, es wird aber einem erkenntnis=theoretisch und ontologisch Fragenden nur eine vorübergehend befriedigende Antwort liefern.

Die in 4) genannte Frage nach der Rolle der Mathematik war für die spezielle Art unserer Rekonstruktion von großer Bedeutung. Unser heuristisches Vorgehen war dies. Modelle der Geometrie sollten endliche Entitäten (Figuren) sein. Alles, was darüber hinaus in den geometrischen Axiome gefordert ist, mußte im übrigen formalen Apparat (d.h. in den Constraints) untergebracht werden. Zunächst erscheint diese Heuristik ziemlich plump, im Lichte der aus ihr gezogenen Folgerungen (siehe Abschnitt V) wird sie je=doch merklich attraktiver.

Kann die Geschichte eine solche Betonung des Endlichen bestätigen? Zweifellos war die Anwendung der Geometrie vor Euklid weitgehend bestimmt durch praktische Probleme, bei deren Lösung man mit speziellen lehrbaren Techniken auskam. In dieser Phase waren sicher alle "intendierten Anwendungen" endlich. Mit Euklids Werk fand nun erstmals die deduktive Methode Eingang in den Wissenschaftsbetrieb. Das be=deutete aber nicht, wie in der modernen Logik, daß die Grundbegriffe zunächst nur als inhalts=leere, syntaktische Gebilde aufgefaßt wurden, vielmehr hatten die Grundbegriffe wohlbe= stimmte intuitive Bedeutungen. Und die in= tuitiven Vorstellungen wurden ja manchmal bei Beweisen benutzt, wodurch diese vom heutigen Standpunkt aus lückenhaft erscheinen. Nun ist es aber klar, daß die Vorstellungen, die mit den Begriffen der Geometrie verbunden waren, Vorstellungen konkreter Sachverhalte und mithin <u>endlicher</u> Objekte waren. Wir ver= muten daher, daß in der Antike die Objekte der Geometrie als endliche Objekte aufgefaßt wurden. Mit anderen Worten: Das Paradigma von Wissenschaftlichkeit erlaubte es nicht, Aus= sagen über das "Unendliche" als wissenschaft= liches Objekt zu machen. Wir vermeiden eine ausführliche Diskussion der delikaten Frage, ob Euklid seine Theorie als Beschreibung "endlicher Modelle" verstanden wissen wollte. Prima facie scheint die Antwort auf diese Frage "Nein" zu lauten, denn Euklid fordert ja in den Postulaten, "daß man eine begrenzte gerade Linie zusammen= hängend gerade verlängern kann" (siehe (5), Postulate). Eine historisch fundierte Antwort könnte jedoch anders ausfallen, eben weil die Wissenschaft jener Zeit noch gewisse Skrupel im Umgang mit dem Unendlichen hatte.

Ohne Benutzung modelltheoretischer Begriffe kann man jedenfalls sagen, daß Euklids Axiome relativ schwach waren im Vergleich zu den Hilbertschen. Sie wurden in den letzten zwei= hundert Jahren sukzessive präzisiert und ver= stärkt. Die mit diesen Verstärkungen befaßten Wissenschaftler waren Mathematiker und als

Grund für die Formulierung eines neuen Axioms ist oft eine Lücke in irgendeinem Beweis zu nennen. In dem Bestreben, bekannte Sätze der Geo=metrie logisch präzise und lückenlos zu be=weisen, mußte man einfach an einigen Stellen Zusatzannahmen machen. Ein besonderes Axiom allerdings, das sogenannte Vollständigkeits=axiom, läßt sich selbst in dieser Weise nicht rechtfertigen. Zu seiner Begründung müssen viel=mehr metamathematische Überlegungen, etwa die Forderung nach kategorischen Axiomensystemen, dienen. Für historische Details verweisen wir auf (6).

Unabhängig von historischen Überlegungen kann die Wahl der Grundbegriffe diskutiert werden. Im Fall der Geometrie gibt es hier viele Mög=lichkeiten. Wir wollen zunächst drei Kriterien über die Wahl der Grundbegriffe formulieren, welche hier zwar am Beispiel der Geometrie auf=gestellt und begründet werden, welche aber auch für andere physikalische Theorien bedeutsam sind.

1) Die nicht-theoretische Sprache soll reich genug sein zur Formulierung relevanter Vor=hersagen.
2) Einige wesentliche Werkzeuge und Hilfsmittel, die für Messungen notwendig sind, sollen einen entsprechenden Grundbegriff induzieren.
3) Mindestens eine Grundgröße soll quantitativ sein.

Bekanntlich gibt es höchst einfache Axiomen=systeme der Geometrie. Man kommt schon mit zwei Grundbegriffen, dem des Punktes und dem des Ab=standes zwischen zwei Punkten aus. Eine Geometrie ist dann einfach ein Paar [M,d],wobei M eine Punktmenge und d eine Abstandsfunktion auf M ist,sodaß gewisse Axiome erfüllt sind.Fassen wir die Abstandsfunktion als theoretische Größe auf,so enthält die nicht-theoretische Sprache genau einen Grundbegriff,nämlich den des Punktes.Hiermit läßt sich aber kein Satz, geschweige denn eine Vorhersage formulieren. Deshalb unser erstes Kriterium,denn zweifel= los gibt es viele praktische Probleme,deren Lösung davon abhängt,ob gewisse geometrische Vorhersagen zutreffen oder nicht.* Einige all= tägliche Beispiele sollen dies verdeutlichen. Sie werden zugleich helfen,eine intuitive Vor= stellung davon zu bekommen,was denn empirische Geometrie überhaupt sei.Die Naivität der Dar= stellung darf nicht darüber hinwegtäuschen,daß die Beispiele in etwas modifizierter Form ständig auch in komplizierteren Überlegungen von Technikern und Physikern wieder auf= tauchen.

<u>B1</u> Man will über einen Bach eine Brücke in Ge= stalt eines langen Brettes legen.Das "über den Bach legen" des Brettes erfordert einigen technischen Aufwand.Damit dieser Aufwand nicht umsonst ist,stellt man vorher geometrische Überlegungen an.Man erwartet von der Geometrie eine Aussage "Das Brett wird über den Bach reichen" oder "Das Brett ist zu kurz".

---

*) In diesem Punkt bin ich Prof.Kamlah für wert= volle Hinweise verpflichtet.

B2 Ein Konzertflügel soll zwei Etagen hochge=
schafft werden.Man untersucht das Treppen=
haus sowie den Flügel und kommt auf Grund
geometrischer Überlegungen zu dem Schluß:
Unmöglich.

B3 Zwei Erben erhalten ein Stück Land zu gleichen
Teilen.Die Teilung wird durch Grenzsteine
markiert.Nach einiger Zeit verklagt der eine
Erbe den anderen,er habe heimlich die Grenz=
steine versetzt.Man zieht einen Geometer zu
Rate,der nach einer Untersuchung erklärt:
"Das eine Stück Land ist kleiner als das
andere".

B4 Ein Bauarbeiter hat beim Mauern eine Reihe
von Steinen gesetzt und beginnt nun mit der
nächsten Reihe.Dazu setzt er zunächst an
beiden äußeren Enden der Mauer jeweils einen
neuen Stein.Er will nun,daß die Steine,die er
dazwischen setzt,alle in einer Geraden mit
den äußeren Steinen liegen.Er spannt ein
Seil vom einen äußeren Stein zum Anderen.
Die Geometrie sagt nun: Wenn er die neuen
Steine so aufsetzt,daß sie das Seil gerade
berühren,so wird die Mauer gerade werden.

B5 Ein im Keller gefundenes Brett soll darauf=
hin untersucht werden,ob es sich als Zwischen=
brett für ein Regal eignet.Man benutzt die
Geometrie,um zu einer Entscheidung zu kommen.

In jedem Beispiel tritt eine geometrische Aussage
auf,die im betreffenden Kontext eine nützliche
Funktion hat.Diese Aussagen sind es,die wir in
Kriterium 1) als relevante Vorhersagen bezeich=

neten.Man sieht sofort ein,daß auch,wenn man zu den Punkten noch Geraden und Ebenen als Grundbegriffe hinzunimmt,solche Vorhersagen nicht formuliert werden können.Man braucht auf alle Fälle noch relationale Grundbegriffe. Hier bieten sich von den bekannten Axiomen= systemen die Begriffe der Inzidenz,Kongruenz und des "Zwischen" an.Für eine axiomatische Darstellung reicht auch hier schon ein einziger relationaler Grundbegriff,etwa die Zwischenrelation (vergleiche z.B.(23)).Man kann mit einem einzigen relationalen Grundbe= griff hinreichend starke und komplizierte Axiome formulieren,sodaß deren Modelle auch die üblichen Axiome der Geometrie erfüllen. Wenn wir uns im Moment auf nicht-metrische Begriffe beschränken,so hat die Benutzung nur eines einzigen relationalen Grundbegriffs folgende Konsequenz.Die Definition anderer Grundbegriffe mit Hilfe des gegebenen einen Grundbegriffs wird sehr kompliziert und be= nutzt in der Regel Existenz-und Eindeutigkeits= sätze,die aus den Axiomen abgeleitet werden müssen.

Natürlich ließen sich auf diese Weise die geometrischen Aussagen der angegebenen Beispiele mit einem einzigen Relationsbegriff formulieren. Man könnte jedoch die Richtigkeit dieser Aus= sagen nur dann annehmen,wenn man vorher über= prüft hätte,daß in dem betreffenden Beispiel auch alle Axiome erfüllt sind.Es ist leicht einzusehen,daß bei Benutzung einer reicheren

Sprache die fraglichen Aussagen schon aus einem (kleinen) Teil der Axiome folgen.Diese Einfachheitsüberlegungen legen es nahe,mehrere relationale Grundbegriffe zu verwenden,anderer= seits ist ein Zuviel an Grundbegriffen uner= wünscht.Der goldene Mittelweg ist hier an den vorhandenen Axiomensystemen der Geometrie ab= zulesen.Die Axiome von Borsuk und Szmielew (3) scheinen uns eine optimale Ausgangsbasis zu liefern.Erstens sind diese Axiome durchweg intuitiv verständlich,zweitens sind sie präzise formuliert,drittens werden so viele Grundbe= griffe verwendet,daß sich die geometrischen Theoreme in relativ durchsichtiger Weise be= weisen lassen und viertens kann man mit diesen tatsächlich relevante Vorhersagen formulieren. Wir werden uns bei der Aufstellung unserer Axiome eng an diesen Standardtext anlehnen. Hierdurch wird die Wahl unserer nicht-theoretischen Grundbegriffe zwar nicht begründet (eine ein= deutige Wahl ist unserer Meinung nach nicht be= gründbar),aber immerhin motiviert.Als nicht- theoretische Grundbegriffe wählen wir: Punkte, Geraden,Ebenen,sowie die Inzidenz- ,Kongruenz- und Zwischenrelation.Man überzeugt sich,daß die Aussagen der Beispiele 1,3,4 und 5 in dieser Sprache formulierbar sind.Wir wollen dies nur an Beispiel B1 erläutern.Durch Triangulation läßt sich der Abstand der beiden Uferpunkte, auf denen das Brett aufliegen soll,ermitteln. Man trägt diesen Abstand auf einer Geraden g an, indem man auf ihr zwei Punkte a und b markiert.

Die Aussage, das Brett sei zu kurz, lautet dann: Bringt man ein Ende α des Brettes mit Punkt a zur Inzidenz so, daß das andere Ende δ auf der Geraden g liegt, so liegt δ zwischen a und b. Natürlich wurde hier bei der Triangulation und beim Abtragen des ermittelten Abstandes Gebrauch von metrischen Begriffen gemacht. Dies ist aber kein Einwand gegen die Behauptung, daß unsere drei Relationen dem Kriterium 1) genügen, denn es dreht sich hier nur darum, die geometrische Aussage zu <u>formulieren</u> und nicht darum, einzusehen, weshalb sie richtig ist.

Wenden wir uns nun dem zweiten Kriterium zu. Angenommen, dieses sei nicht erfüllt. Dann sind alle wesentlichen Werkzeuge und Hilfsmittel, die bei geometrischen Messungen benutzt werden, ohne Zusammenhang mit den Grundbegriffen. Es fragt sich, wie in diesem Fall eine Aussage der Geometrie zu verstehen ist. Abgesehen von dem rein formalen Aspekt, daß eine solche Aussage, <u>vorausgesetzt</u>, daß wir über ein bestimmtes Modell reden, gewisse Beziehungen zwischen Objekten dieses Modells zum Ausdruck bringt, sagt dann ein geometrischer Satz nichts über die Realität oder, wie man auch sagt, über unsere lebensweltliche Erfahrung, aus. Das hiermit angesprochene Problem, wie die Terme einer Theorie Bedeutung bekommen, darf wohl als ungelöst bezeichnet werden. Wir sind der Meinung, daß eine Teilklasse der Klasse aller Grundbegriffe der Geometrie, nämlich die Klasse der nicht-theoretischen Terme, einer ostensiven oder operativen Bedeutungsgebung zugänglich sein sollte. Würde keine physikalische Theorie diese Bedingung er= füllen,so dürfte das Problem,wie die Terme von Theorien Bedeutung erlangen,nicht nur als ungelöst,sondern als unlösbar bezeichnet werden. Andererseits ist es angesichts des Umstandes, daß es theoretische Terme gibt,nicht zu er= warten,daß <u>alle</u> Terme einer Theorie auf die oben genannte Weise Bedeutung erhalten.Unser Kriterium 2) stellt somit nur eine minimale Forderung,nämlich,daß mindestens ein Term einer operativen oder ostensiven Deutung zu= gänglich sei.

Zum Glück sind fast alle nicht-theoretischen Terme der Geometrie von dieser Art.Bei den von uns gewählten Grundbegriffen tritt dies be= sonders deutlich für Geraden,Ebenen und die Kongruenzrelation zutage.Unsere natürlichen Maßstäbe: Stangen,Seile,Ketten,Lichtstrahlen etc. sind approximative Modelle für geometrische Geraden.Ebenso sind Platten,Tafeln,Papierbögen "natürliche" Modelle von Ebenen.Schließlich ist ein Standardmeßverfahren zur Längenmessung, nämlich das Messen mittels eines Maßstabes,ein Beispiel für die Bedeutung der Kongruenz= relation.Bei diesem Verfahren handelt es sich ja um das Herstellen von Kongruenzen gewisser Strecken nach bestimmten Regeln.Wir verzichten hier auf eine weitergehende operative Begründung der von uns benutzten Grundbegriffe.

Im Gegensatz zu den beiden ersten Kriterien scheint Kriterium 3) mindestens im Falle der Geometrie problematisch zu sein.Der Grund liegt auf der Hand: Die Geometrie läßt sich bereits mit den bisher genannten qualitativen Be= griffen vollständig darstellen.Wozu also noch quantitative Größen? Die Antwort hierauf fällt nicht leicht.Nehmen wir an,daß sich eine empirische Geometrie nur ohne quantitative Begriffe adäquat rekonstruieren läßt und be= trachten die Folgerungen aus dieser Annahme. Da die Theorien der klassischen Physik auf der euklidischen Geometrie aufbauen und da in diesen Theorien quantitative Begriffe auftreten, müssen Letztere nach der Geometrie eingeführt werden.Es kommen aber bereits in der Kinematik quantitative Begriffe vor,nämlich die Orts= funktion.Die erste Möglichkeit,nämlich daß quantitative Begriffe in der Kinematik erst= mals auftreten,steht im Widerspruch zu unserer Intuition,daß die Ortsfunktion auf eine Ab= standsfunktion zurückzuführen sei.Es bleibt also noch die Möglichkeit,daß zwischen Geometrie und Kinematik eine eigene Theorie konstruiert wird, die die Einführung des quantitativen Begriffs "Abstand" beschreibt.Die Annahme,daß eine empirische Geometrie nur ohne quantitative Begriffe rekonstruiert werden kann,führt somit zu der Notwendigkeit einer Zwischentheorie zwischen Geometrie und Kinematik.

Betrachten wir nun die gegenteilige Annahme, also die Annahme,daß eine adäquate Rekonstruktion auch mit (prinzipiell überflüssigen) quantitativen Begriffen durchführbar ist.Diese Annahme läßt die Möglichkeit einer Rekonstruktion zu,die drei

Vorteile besitzt.Erstens braucht man zwischen Geometrie und Kinematik keine Theorie,mittels derer die quantitativen Begriffe eingeführt werden.Zweitens ist unser Kriterium 3) er= füllt und wir haben die Möglichkeit,die Ein= führung quantitativer Begriffe an einem weiteren Beispiel zu untersuchen.Drittens können qualitative Axiome eingespart werden.Zum dritten Punkt ist sogleich eine einschränkende Bemerkung zu machen.Zwar können qualitative Axiome eingespart werden,weil die qualitativen Begriffe durch die Abstandsfunktion definierbar sind.Es können sogar alle qualitativen Axiome ersetzt werden.Aber die neuen metrischen Axiome, die als Ersatz dienen,sind nicht einfacher als die Alten.Auch ist das nicht-theoretische Vokabular dann,wie bereits erwähnt,zu arm zur Formulierung relevanter Vorhersagen.Ein zwang= loser Mittelweg besteht darin,das nicht-theoretische Vokabular -und das sind gerade die bisher aufgezählten Begriffe- als vorge= geben zu betrachten.Die Entscheidung,welche der mit diesem Vokabular formulierten Axiome durch Axiome mit quantitativen Begriffen ersetzt werden,ist dann zum Teil auch eine Entscheidung darüber,ob man für die vor-theoretischen Strukturen der Geometrie geometrische Axiome fordern soll.Es sei bemerkt,daß diese Ent= scheidung in unserer Arbeit weitgehend den Charakter einer ad hoc Entscheidung hat und daß hier noch Platz für weitere Diskussion ist.

Die Folgerungen aus den beiden Annahmen über die Adäquatheit einer empirischen Geometrie ohne und mit quantitativen Begriffen legen es nahe, die zweite Annahme zu akzeptieren. Außerdem gibt es noch weitere Gründe, an Kriterium 3) festzuhalten. Wenn alle bisherigen qualitativen Begriffe operativ deutbar sind und damit zur Beobachtungssprache gehören, möchte man folgern, daß es in der Geometrie keine theoretischen Terme gibt. Diese Folgerung ist jedoch nur partiell richtig. Sie ist richtig, wenn man theoretisch definiert als nicht zur Beobachtungssprache gehörig. Seit Sneeds theorienbezogenem, funktionalem Theoretizitäts=kriterium braucht man sich jedoch in der Definition von Theoretizität nicht mehr auf die Beobachtungssprache zu beziehen. In der Tat, die quantitative Größe des Abstands in der Geometrie ist eine theoretische Größe im Sinne von Sneed. Wir stehen somit vor der merkwürdigen Tatsache, daß es in der Geometrie zwar theoretische Terme gibt, daß diese im Prinzip jedoch nicht nötig sind, genauer: Sie sind Ramsey-eliminierbar. Damit befinden wir uns in Widerspruch zu der Vermutung, daß in allen interessanten Theorien nicht-Ramsey-eliminierbare theoretische Terme vorkommen (vergleiche (21), S.280 ff). Der tiefere Grund dieses Dilemmas liegt darin, daß wir bei Geometrie an die ausgereifte axiomatische Theorie der Mathematiker denken, während unsere wissenschaftstheoretischen Untersuchungen auf <u>empirische</u> Theorien gerichtet sind. Die mathe=matische Geometrie ist aber keine empirische

Theoric.Diese These,mit der die ganze Problematik verschwindet,folgt auch aus der spezielleren These: Die Axiome der mathematischen Geometrie sind zu stark,um in ihrer Gesamtheit als Grundlage für eine empirische Theorie dienen zu können.Anders: Die qualitativ formulierten Axiome sind so stark,daß sich aus ihnen die Existenz und Eindeutigkeit (bis auf Wahl der Maßeinheit) einer Abstands=funktion beweisen läßt.

Wenn wir bei der Rekonstruktion einer empirischen Geometrie mit der vollen mathe=matischen Theorie ansetzen,werden theoretische Terme (hier die Abstandsfunktion) überflüssig. Ein solcher Ansatz liefert keinen Beitrag zum allgemeinen Verständnis der Rolle theoretischer Terme.Dies ist ein weiterer Grund für Kriterium 3).Um etwas über theoretische Terme aussagen zu können,muß man auch theoretische Terme haben.In der Geometrie bedeutet quantitativ und theoretisch sogar dasselbe. So gesehen besagt Kriterium 3) einfach,daß die Theorie (in unserem Spezialfall) mindestens eine theoretische Größe enthält.

Ein letzter Grund für 3) ist der.In der empirischen Geometrie,welche für praktische Anwendungen wie die oben Beschriebenen nütz=lich sein soll,ist der Abstand der zentrale Grundbegriff.Zwar tritt in vielen Anwendungen auch der Winkel als quantitative Größe auf, aber Winkel und Abstand sind wechselseitig durch einander definierbar.Sicher könnte man auch mit zwei quantitativen Grundbegriffen arbeiten.Allerdings würde das System dadurch nicht einfacher.Jedenfalls genügen auch Systeme mit mehreren quantitativen Grundbegriffen unserem Kriterium 3).

Gemäß diesen Ausführungen nehmen wir zu den genannten nicht-theoretischen Grundbegriffen noch den quantitativen Begriff des Abstands als theoretischen Grundbegriff hinzu.

Die Abstandsfunktion ist ein theoretischer Term im Sinne von Sneed.Hierüber sollte man sich Klarheit verschaffen,bevor die Formalisierung beginnt.An einer informellen Darstellung kann man nicht unmittelbar ab=lesen,welche Größen theoretisch sind.Da man diese Unterscheidung aber zur Formalisierung braucht,muß eine Entscheidung über Theoretizität vor der Formalisierung auf in=formeller Ebene gefällt werden.Hierzu können wir das Sneedsche Theoretizitätskriterium verwenden.Der Abstand zweier Punkte muß nach diesem Kriterium in jeder Anwendung theorien=anhängig gemessen werden,was wiederum besagt, daß eine andere Anwendung der Theorie bereits als erfolgreich (d.h.als Modell) vorausge=setzt werden muß (vergleiche (20),S.31 und S. 33).Natürlich können wir nicht alle Anwendungen überprüfen,weil wir nicht alle kennen und weil bis jetzt auch keine Systematik für die be=kannten Anwendungen existiert.Wir wollen hier nur am denkbar einfachsten Beispiel plausibel machen,daß die Abstandsfunktion das Sneedsche Kriterium erfüllt (eine ausführlichere Dis=

kussion folgt in Abschnitt V).Wir möchten be=tonen,daß die folgenden Überlegungen intuitiv und informell sind.Es ist leicht,von einem höheren Standpunkt aus Einwände zu erheben oder Unverständlichkeitsbehauptungen aufzu=stellen.Im Moment geht es jedoch nur um ein ganz naives Verständnis.Der einfachste Fall einer Abstandsmessung zwischen zwei Punkten liegt vor,wenn die Punkte eine Längeneinheit voneinander entfernt sind und der Abstand mit einem starren Stab der Länge 1 gemessen werden soll.Daß der Stab diese Länge hat,soll vorher festgestellt worden sein.Man braucht dann nur die beiden Enden des Stabes mit den Punkten zur Inzidenz zu bringen.Wenn dies gelingt,so beträgt der Abstand zwischen den Punkten eine Längeneinheit.Was ist aber,wenn der Maßstab nicht mehr richtig gerade ist,sondern in=zwischen gekrümmt wurde? In diesem Fall kann man die Endpunkte des Stabes und die beiden Punkte nicht zur Inzidenz bringen,der Stab ist "zu kurz".Die Messung des Abstandes als "kürzester" oder "geradliniger" Verbindung zwischen zwei Punkten setzt also voraus,daß der benutzte Stab gerade ist,d.h. daß der Maß=stab selbst eine (bzw. Teil einer) euklidische Gerade bildet,oder anders,der Maßstab selbst mit seinen Endpunkten muß bereits Modell der Theorie sein.Um also den Abstand zu messen,muß eine andere Anwendung der Theorie,nämlich die, in der die "Geradheit" des Stabes festgestellt wird,bereits erfolgreich gewesen sein.

III IDEALE EMPIRISCHE GEOMETRIEN

Unter Berücksichtigung der in II angeführten Punkte geben wir nun eine Formalisierung der Geometrie an,sodaß die Struktur einer physikalischen Theorie im Sinne von Sneed (D6-a) erkennbar wird (daher "empirisch"). Gleichzeitig besitzt unser System noch einen hohen Idealisierungsgrad,weil die Objekte: Punkte,Geraden und Ebenen,von denen die Rede ist,als ideale Gebilde aufgefaßt werden,z.B. haben Punkte keine Ausdehnung.Solche Objekte finden wir in unserer Erfahrungswelt nicht vor.

Zunächst beschreiben wir die partiellen potentiellen Modelle.Da es sich stets um eine bestimmte Theorie,in diesem Abschnitt um die Geometrie,handelt,werden wir den Bestandteilen des Kerns bestimmte Namen geben.Wir reden so nicht von partiellen potentiellen Modellen, potentiellen Modellen,Modellen und Constraints, sondern von partiellen möglichen Figuren, möglichen Figuren,Figuren und abgeschlossenen Figurenmengen respektive.

<u>D9</u> $[P,G,E,\prec,Z,K]$ heißt <u>partielle mögliche Figur</u>,wenn gilt

1) P,G,E sind endliche,disjunkte Mengen,$P \in \mathfrak{M}$
2) $\prec \subseteq P \times (G \cup E)$
3) $Z \subseteq P^3$
4) $K \subseteq P^4$

Die Elemente von P,G,E sind die Punkte,Geraden und Ebenen.Man beachte,daß alle drei Mengen endlich sind.Die Relation $\leqslant$ ist die Inzidenzrelation.Da Punkte sowohl mit Geraden,als auch mit Ebenen inzidieren können, ist der Nachbereich von $\leqslant$ die Menge aller Geraden und Ebenen.Z ist die dreistellige Zwischenrelation für Punkte.Wir schreiben Z(a,b,c) und lesen "b liegt zwischen a und c", was auch durch die Schreibweise angedeutet ist. K schließlich steht für die Kongruenzrelation. Intuitiv stellt man sich zwei Strecken als kongruent vor,wenn sie gleich lang sind.Will man dies durch Punkte ausdrücken,so ersetzt man die Strecken durch Punktepaare,wobei als Punkte die Endpunkte der Strecken zu wählen sind.Die Relation K wird dann zu einer vierstelligen Relation zwischen Punkten.Wir schreiben K(a,b/a′,b′) und lesen "ab ist kongruent zu a′b′".Intuitiv bedeutet dies,daß der Abstand von a und b genauso groß ist wie der von a′ und b′.

Eine partielle mögliche Figur enthält alle nicht-theoretischen Grundbegriffe unserer Theorie entsprechend den Vorbemerkungen in II. Man beachte,daß die Relationen hier noch völlig unbestimmt sind.Zum Vergleich betrachte man etwa partielle potentielle Modelle der Partikelmechanik,in denen unter anderen Relationen die Ortsfunktion auftritt.Diese ist -mengentheoretisch ausgedrückt- bereits durch eine große Zahl von Forderungen bestimmt.Es stecken in ihr sowohl die Axiome der reellen Zahlen,als auch die Axiome der Geometrie.Da= gegen ist bei den Relationen in D9 nur die

Grundmenge,auf der die Relation operiert, festgelegt.Hierdurch wird zwar keine bestimmte anschauliche Vorstellung erzwungen,da eine solche aber sehr nützlich ist,wollen wir kurz ein typisches Modell beschreiben.Man stelle sich Geraden als endliche Strecken vor und Ebenen als endliche,geradlinig begrenzte Flächen.Eine endliche Zahl solcher Entitäten zusammen mit endlich vielen Punkten sei gegeben. Wir stellen uns vor,daß jeder Punkt auf einer Geraden oder Ebenen liegt und daß alle Geraden und Ebenen sich berühren,schneiden oder durch= stoßen.So erhalten wir ein geometrisches Ge= bilde,welches die anschauliche Grundlage dieser und der folgenden Definitionen bildet.

Für weitere Definitionen führen wir einige Bezeichnungen ein.In D10-1 werden Mitteilungs= zeichen für Punkte,Geraden und Ebenen festge= legt.Im Folgenden werden die angegebenen Buch= staben stets nur gemäß dieser Konvention ver= wandt.Wenn also in einer Formel z.B. der Buch= stabe "a" auftritt,so ist klar,daß von einem Punkt die Rede ist.Der Ausdruck $x \sqcap y$ in D10-2.4 und 2.5 bedeutet den Durchschnitt von x und y. Sind x und y Geraden,so ist $x \sqcap y$ ihr Schnitt= punkt,falls sie einen solchen haben,ansonsten leer.Ist x eine Gerade und y eine Ebene,so ist $x \sqcap y$ entweder leer oder gleich x oder ein Punkt, je nachdem ob x die Ebene y überhaupt nicht schneidet oder x in der Ebene y liegt oder x die Ebene y schneidet,aber nicht in dieser Ebene liegt.D10-2.6 bis 2.8 regeln die Gleichheit und

Inklusion für Geraden und Ebenen. Gleichheit liegt vor bei Übereinstimmung in allen Punkten, welche mit x und y inzidieren. Wir vermeiden es dabei, uns eine Gerade als Kontinuum von Punkten vorzustellen. Nach D9 kann es nur endlich viele Punkte geben, die mit einer Geraden inzidieren. Was "zwischen" diesen Punkten auf der Geraden liegt, wird hier nicht gefragt. Dies ist der tiefere Grund, weshalb wir Geraden und Ebenen als eigene Grundbegriffe einführen. Wenn man eine Gerade als Kontinuum von Punkten auffaßt, so kann man auf den Grundbegriff der Geraden verzichten. Es kommt dann aber zu dem bekannten Problem der Scholastiker, wie ein Kontinuum von unausgedehnten Punkten eine Ausdehnung besitzen kann.

Stellt man sich eine Gerade als Stange vor und die mit ihr inzidierenden Punkte als Kerben oder Marken auf dieser Stange, so kann es wohl vorkommen, daß zwei Punkte auf der Geraden weit auseinander liegen, obwohl zwischen ihnen kein weiterer Punkt auf der Geraden existiert.

Typisches Beispiel für die Inklusion $\sqsubseteq$ ist eine Gerade x, welche in einer Ebene y liegt. Natürlich kann $x \sqsubseteq y$ auch für zwei Geraden oder zwei Ebenen gelten.

<u>D10</u> (Bezeichnungen)

Ist $F=[P,G,E,<,Z,K]$ eine partielle mögliche Figur, so vereinbaren wir

1) Zur Bezeichnung der Elemente von

$$\left.\begin{matrix} P \\ G \\ E \end{matrix}\right\} \text{ verwenden wir stets die Buchstaben } \left\{\begin{matrix} a,b,c,a_i,b_i,c_i \\ \alpha,\beta,\gamma,\alpha_i,\beta_i,\gamma_i \\ A,B,C,A_i,B_i,C_i \end{matrix}\right.$$

2) Für $x,y \in G \cup E$ schreiben wir

2.1) $a \lessdot x$ für $\lessdot(a,x)$

2.2) $a \not\lessdot x$ für $\neg(a \lessdot x)$

2.3) $a_1,..,a_n \lessdot x$ für $a_1 \lessdot x \wedge \ldots \wedge a_n \lessdot x$

2.4) $a \lessdot x \sqcap y$ für $a \lessdot x \wedge a \lessdot y$

2.5) $a_1,..,a_n \lessdot x \sqcap y$ für $a_1 \lessdot x \sqcap y \wedge \ldots \wedge a_n \lessdot x \sqcap y$

2.6) $x=y$ für $\forall a(a \lessdot x \leftrightarrow a \lessdot y)$

2.7) $x \neq y$ für $\neg(x=y)$

2.8) $x \sqsubseteq y$ für $\forall a(a \lessdot x \rightarrow a \lessdot y)$

3) $\mathrm{coll}(a,b,c) \equiv \exists \alpha \in G(a,b,c \lessdot \alpha)$

4) $\mathrm{copl}(a_1,..,a_4) \equiv \exists A \in E(a_1,..,a_4 \lessdot A)$

5) $\delta_{F,a,b} := \{c \in P / Z(a,c,b) \vee Z(a,b,c) \vee c=b\}$

6) $Z(a,\alpha,b) \equiv a,b \not\lessdot \alpha \wedge \exists c(c \lessdot \alpha \wedge Z(a,c,b))$

7) $H_{F,\alpha,a} := \{c \in P / Z(c,\alpha,a)\}$ falls $a \not\lessdot \alpha$

8) Wir schreiben

8.1) $a \in F$ für $a \in P$

8.2) $a_1,..,a_n \in F$ für $a_1 \in F \wedge \ldots \wedge a_n \in F$

8.3) $\alpha \in F$ für $\alpha \in G$

8.4) $\alpha_1,..,\alpha_n \in F$ für $\alpha_1 \in F \wedge \ldots \wedge \alpha_n \in F$

8.5) $A \in F$ für $A \in E$

8.6) $A_1,..,A_n \in F$ für $A_1 \in F \wedge \ldots \wedge A_n \in F$

8.7) Sind $x_1,..,x_n \in P \cup G \cup E$, so bedeute

$$\forall x_1,..,x_n \in F \equiv \forall x_1 \in F \ldots \forall x_n \in F$$

$\mathrm{coll}(a,b,c)$ bedeutet, daß a, b und c auf einer Geraden liegen, d.h. co-linear sind (D10-3). $\mathrm{copl}(a_1,..,a_4)$ bedeutet, daß $a_1,..,a_4$ co-planar sind, d.h. in einer Ebene liegen.

$\delta_{F,a,b}$ ist die Halbgerade mit Ursprung a, welche durch Punkt b geht. Der Index F deutet an, daß diese Halbgerade bezüglich einer bestimmten Figur F definiert ist. Für $F' \neq F$ kann $\delta_{F,a,b} \neq \delta_{F',a,b}$ sein. $Z(a,\alpha,b)$ bedeutet, daß die Gerade α zwischen den Punkten a und b verläuft. Stellen wir uns vor, daß a, b und α in einer Ebene liegen, welche durch α in zwei Hälften geteilt wird. $Z(a,\alpha,b)$ heißt dann, daß a in der einen Hälfte und b in der anderen Hälfte liegt. $H_{F,\alpha,a}$ heißt Halbebene mit Rand α bezüglich a. Durch α und a ist nämlich eine Ebene bestimmt, welche durch α in zwei Hälften geteilt wird. Die Hälfte, in der a nicht liegt, einschließlich der Geraden α, ist dann $H_{F,\alpha,a}$. Auch hier brauchen wir die Relativierung auf eine bestimmte partielle mögliche Figur.

Wir führen nun die potentiellen Modelle ein.

<u>D11</u> $[P,G,E,\prec,Z,K,d]$ heißt <u>mögliche Figur</u>, wenn gilt

1) $[P,G,E,\prec,Z,K]$ ist eine partielle mögliche Figur
2) $d: P \times P \to \mathbb{R}$

Zu den nicht-theoretischen Termen von D9 ist hier die Abstandsfunktion d als theoretischer Term hinzugetreten. Die Abstandsfunktion soll die Eigenschaften einer Metrik haben.

<u>D12</u> Es sei P eine Menge.
Eine Funktion $d: P \times P \to \mathbb{R}$

heißt <u>Metrik</u> (auf P),wenn für alle $a,b,c \in P$ gilt

1) $d(a,b) \geqslant 0$
2) $d(a,b)=0 \leftrightarrow a=b$
3) $d(a,b)=d(b,a)$
4) $d(a,b) \leqslant d(a,c)+d(c,b)$

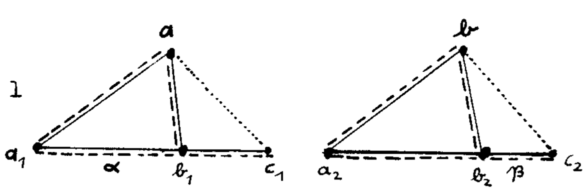
Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die Modelle angeben.

<u>D13</u> $F=[P,G,E,\lessdot,Z,K,d]$ heißt <u>Figur</u>,wenn gilt

1) F ist eine mögliche Figur
2) $\forall \alpha \exists a,b(a\neq b \wedge a,b \lessdot \alpha)$
3) $\forall a,b \exists \alpha(a,b \lessdot \alpha)$
4) $\forall a,b(a\neq b \rightarrow \forall \alpha,\beta\,(a,b \lessdot \alpha \sqcap \beta \rightarrow \alpha=\beta))$
5) $\forall A \exists a,b,c(\neg \mathrm{coll}(a,b,c) \wedge a,b,c \lessdot A)$
6) $\forall a,b,c \exists A(a,b,c \lessdot A)$
7) $\forall a,b,c(\neg \mathrm{coll}(a,b,c) \rightarrow \forall A,B(a,b,c \lessdot A \sqcap B \rightarrow A=B))$
8) $\forall \alpha \forall A(\exists a,b(a\neq b \wedge a,b \lessdot \alpha \sqcap A) \rightarrow \alpha \sqsubseteq A)$
9) $\forall a,b,c(Z(a,b,c) \rightarrow \mathrm{coll}(a,b,c) \wedge a\neq b\neq c\neq a)$
10) $\forall a,b,c(\mathrm{coll}(a,b,c) \wedge a\neq b\neq c\neq a \rightarrow Z(a,b,c) \vee Z(b,c,a) \vee Z(c,a,b))$
11) $\forall a,b,c,a'(Z(a,b,c) \wedge Z(b,c,a') \rightarrow Z(a,b,a'))$
12) $\forall a,b,c,a'(Z(a,b,a') \wedge Z(b,c,a') \rightarrow Z(a,b,c))$
13) $\forall \alpha,\beta\, \forall a,a_1,b_1,c_1,b,a_2,b_2,c_2(a_1,b_1,c_1 \lessdot \alpha \wedge a \not\lessdot \alpha \wedge a_2,b_2,c_2 \lessdot \beta \wedge b \not\lessdot \beta \wedge Z(a_1,b_1,c_1) \wedge Z(a_2,b_2,c_2) \wedge K(a_1,b_1/a_2,b_2) \wedge K(b_1,c_1/b_2,c_2) \wedge K(a,a_1/b,a_2) \wedge K(a,b_1/b,b_2) \rightarrow K(a,c_1/b,c_2))$
14) d ist eine Metrik auf P
15) $\forall a,b,c(Z(a,b,c) \leftrightarrow d(a,b)+d(b,c)=d(a,c))$
16) $\forall a,b,a_1,b_1(K(a,b/a_1,b_1) \leftrightarrow d(a,b)=d(a_1,b_1))$

Es scheint uns angebracht,diese Axiome auch in der üblichen umgangssprachlichen Fassung auf=zuschreiben.Sie lauten dann bei entsprechender Numerierung.2) Jede Gerade inzidiert mit zwei verschiedenen Punkten.3) Je zwei Punkte inzidieren mit mindestens einer Geraden.4) Je zwei ver=schiedene Punkte inzidieren mit höchstens einer Geraden. 5) Jede Ebene inzidiert mit drei nicht-co-linearen Punkten.6) Je drei Punkte inzidieren mit wenigstens einer Ebene.7) Je drei nicht-co-lineare Punkte inzidieren mit höchstens einer Ebene.8) Haben eine Gerade und eine Ebene zwei verschiedene Punkte gemeinsam,so liegt die ganze Gerade in der Ebene.9) Liegt b zwischen a und c,dann sind a,b und c co-linear und alle verschieden. 10) Sind a,b,c co-linear und verschieden,dann liegt b zwischen a und c oder c zwischen b und a oder a zwischen c und b. 11) Liegt b zwischen a und c und c zwischen b und a',so liegt b zwischen a und a'. 12) Liegt b zwischen a und a'und c zwischen b und a',so liegt b zwischen a und c. 13) läßt sich am Besten durch eine Skizze verdeutlichen:

Figur 1



Sind alle schraffierten Strecken kongruent,so auch die punktierten.Die restlichen Axiome sind unmittelbar verständlich.

Eine Figur kann man sich folgendermaßen vorstellen.Man denke sich die endlich vielen Punkte von P im dreidimensionalen Raum ange=ordnet.Dann verbinde man alle Punkte unterein=ander durch Geraden und fülle alle so entstehenden Dreiecke durch Flächen aus.Das dann entstandene Gebilde ist ein Standardmodell unserer Axiome (daher auch die Bezeichnung "Figur").Wegen $P \neq \emptyset$ enthält P nach D13-6 und 5 mindestens drei Punkte.Das Minimalmodell besteht also aus einem Dreieck,sowie dessen Eckpunkten und Seiten,wobei die Seiten über die Eckpunkte hinausragen können.

D13-15 und 16 können als Definitionen für Z und K dienen.Wir kämen also,wie in den Vorbe=merkungen gesagt,mit d als einziger Relation aus.Dort wurden aber auch die Gründe für die Verwendung von Z und K dargelegt.Umgekehrt bilden D13-15 und 16 keine Definition von d mittels Z und K.Dies sieht man an folgendem Satz.

<u>T1</u> In einer Figur ist die Metrik d nicht durch Z und K definierbar.

Beweis: Wäre d durch Z und K definierbar,so wäre jede Figur eine konservative Erweiterung der Struktur,die aus ihr durch Weglassen von d und der Axiome,in denen d vorkommt,entsteht (ver=gleiche (18),S.57 ff).Daß dies nicht sein kann, zeigen wir an einem Beispiel.Wir geben eine Struktur ohne Abstandsfunktion an,welche alle Axiome D13-1 bis 13 erfüllt,aber sich nicht durch eine Metrik so ergänzen läßt, daß D13-15 und 16 gelten. Wir definieren: $P:=\{a,b,c,e\}$, $G:=\{\alpha,\beta,\gamma,\alpha'\}$, $E:=\{A\}$, $\prec\ :=\{[a,\alpha],[e,\alpha],[c,\alpha],[a,\beta],[b,\beta],[b,\gamma],[c,\gamma],[b,\alpha'],[e,\alpha'],[a,A],[b,A],[c,A],[e,A]\}$, $Z:=\{[a,e,c]\}$, $K:=\{[a,e,a,b],[e,c,b,c]\}$. Man prüft leicht nach, daß $[P,G,E,\prec,Z,K]$ eine partielle mögliche Figur ist, die D13-2 bis 13 erfüllt. Angenommen, es gebe eine Metrik d mit den Eigenschaften D13-15 und 16. Es folgt: $d(a,e)+d(e,c)=d(a,c)$ aus $Z(a,e,c)$ und 15), sowie $d(a,e)=d(a,b)$ und $d(e,c)=d(b,c)$ aus $K(a,e/a,b)$, $K(e,c/b,c)$ und 16). Hieraus erhält man $d(a,b)+d(b,c)=d(a,c)$ und damit nach 15): $Z(a,b,c)$ im Widerspruch zur Definition von Z.

Aus D13 können wir einige einfache Folgerungen ableiten.

<u>T2</u> Ist $[P,G,E,\prec,Z,K,d]$ eine Figur, so gilt für alle $a,b,c,a_i,b_i,c_i \in P$

a) $Z(a,b,c) \rightarrow Z(c,b,a)$

b) $Z(a,b,c) \rightarrow \neg Z(b,a,c)$

c) $K(a,b/c,c) \leftrightarrow a=b$

d) $K(a,b/b,a)$

e) $K(a,b/a_1,b_1) \wedge K(a,b/a_2,b_2) \rightarrow K(a_1,b_1/a_2,b_2)$

f) $K(a_1,b_1/a_2,b_2) \wedge K(b_1,c_1/b_2,c_2) \wedge Z(a_1,b_1,c_1) \wedge Z(a_2,b_2,c_2) \rightarrow K(a_1,c_1/a_2,c_2)$

Beweis: a) folgt aus D13-14 und D12-3.
b) Wir nehmen an, es gelte $Z(a,b,c)$ und $Z(b,a,c)$. Es folgt $d(a,b)+d(b,c)=d(a,c)$ und $d(b,a)+d(a,c)=d(b,c)$ nach D13-15 und hieraus $2d(a,b)+d(b,c)=d(b,c)$ mit D12-3. Aus letzter Gleichung und D12-1 folgt $d(a,b)=0$ und daher mit D12-2 $a=b$. Aus

Z(a,b,c) folgt aber nach D13-9,daß $a \neq b$.Also ist unsere Annahme falsch.

c) folgt aus D13-16 und D12-2.

d) folgt aus D13-16 und D12-3.

e) folgt aus D13-16.

f) folgt aus D13-15 und 16.

Da die bisher definierten Figuren endliche Objekte sind,die Modelle der Geometrie aber un= endlich,müssen wir wesentliche Forderungen der Geometrie als Constraints,d.h als Beziehungen zwischen Figuren darstellen.Hierzu benötigen wir einige zu D10 analoge Bezeichnungen,die sich von den dortigen nur durch einen zusätz= lichen Index,der die Figur angibt,bezüglich derer die betreffende Relation gelten soll, unterscheiden.

D14 (Bezeichnungen)

Ist I eine Indexmenge und sind für $i \in I$ $F_i = [P_i, G_i, E_i, \lessdot_i, Z_i, K_i, d_i]$ Figuren,so verein= baren wir

1) Die Elemente von P_i, G_i, E_i werden weiterhin gemäß D10-1 bezeichnet

2) Für $x, y \in G_i \cup E_i$ schreiben wir

2.1) $a \lessdot_i x$ für $\lessdot_i(a,x)$

2.2) $a \not\lessdot_i x$ für $\neg(a \lessdot_i x)$

2.3) $a_1,..,a_n \lessdot_i x$ für $a_1 \lessdot_i x \wedge \ldots \wedge a_n \lessdot_i x$

2.4) $a \lessdot_i x \sqcap y$ für $a \lessdot_i x \wedge a \lessdot_i y$

2.5) $a_1,..,a_n \lessdot_i x \sqcap y$ für $a_1 \lessdot_i x \sqcap y \wedge .. \wedge a_n \lessdot_i x \sqcap y$

2.6) $x =_i y$ für $\forall a(a \lessdot_i x \leftrightarrow a \lessdot_i y)$

2.7) $x \neq_i y$ für $\neg(x =_i y)$

2.8) $x \subseteq_i y$ für $\forall a (a <_i x \rightarrow a <_i y)$

3) $\mathrm{coll}_i(a,b,c) \equiv \exists \alpha \in G_i (a,b,c <_i \alpha)$

4) $\mathrm{copl}_i(a_1,..,a_4) \equiv \exists A \in E_i (a_1,..,a_4 <_i A)$

5) $\delta_{i,a,b} := \{c \in P_i / Z_i(a,c,b) \vee Z_i(a,b,c) \vee c=b\}$

6) $Z_i(a,\alpha,b) \equiv a,b \not<_i \alpha \wedge \exists c (c <_i \alpha \wedge Z_i(a,c,b))$

7) $H_{i,\alpha,a} := \{c \in P_i / Z_i(c,\alpha,a)\}$ falls $a \not<_i \alpha$

8) D10-8 gelte entsprechend für $\in_i$ statt $\in$

9) Gilt $P_i \subseteq P_j$ und $x_i \in G_i \cup E_i, x_j \in G_j \cup E_j$, so
sei $x_i < x_j \equiv \forall a \in P_i (a <_i x_i \rightarrow a <_j x_j)$

Die einzige gegenüber D10 neue Bezeichnung ist D14-9. $x_i < x_j$ besagt, daß alle Punkte der "kleineren" Figur mit Punktmenge P_i $(P_i \subseteq P_j)$ genau dann auf der Geraden oder Ebene x_i liegen, wenn sie auch auf der Geraden oder Ebene x_j der größeren Figur liegen. Als einfaches Beispiel kann man sich eine Gerade x_i vorstellen, welche mit allen Punkte von P_i inzidiert. Ver=längert man diese Gerade, sodaß sie mit weiteren Punkten $a_1,..,a_n$ inzidiert und setzt $P_j := P_i \cup \{a_1,..,a_n\}$, so gilt für die erweiterte Gerade x_j: $x_i < x_j$. Daß man diese Beziehung braucht, zeigt die folgende Definition.

<u>D15</u> a) Es seien $F_i = [P_i, G_i, E_i, <_i, Z_i, K_i, d_i], i=1,2$ Figuren.
F_2 heißt <u>eine Erweiterung</u> von F_1 (in Zeichen: $F_1 \sqsubset F_2$), wenn gilt

1) $P_1 \subseteq P_2$

2) $\forall \alpha \in G_1 \; \exists \beta \in G_2 (\alpha < \beta)$
3) $\forall A \in E_1 \; \exists B \in E_2 (A < B)$
4) $\forall a,b \in P_1 (d_1(a,b) = d_2(a,b))$

b) Wir schreiben kurz
b.1) $F_1,..,F_n \sqsubset F$ für $F_1 \sqsubset F \wedge ... \wedge F_n \sqsubset F$
b.2) $F \sqsubset F_1,..,F_n$ für $F \sqsubset F_1 \wedge ... \wedge F \sqsubset F_n$
b.3) $F_1 \sqsubset F_2 \sqsubset F_3$ für $F_1 \sqsubset F_2 \wedge F_2 \sqsubset F_3$

Der Begriff der Erweiterung ist leicht zu ver= anschaulichen.Man stelle sich eine Figur F_1 vor. Zu dieser nehme man nun weitere Punkte hinzu und vervollständige das Gebilde wie früher be= schrieben zu einer Figur F_2 durch Hinzunahme aller nötigen Geraden und Ebenen.Genau dann ist F_2 eine Erweiterung von F_1,wenn F_2 auf diese Weise aus F_1 gewonnen werden kann.Insbesondere gelten also gemäß D15-a die folgenden Aussagen. Jeder Punkt von F_1 gehört auch zu F_2.Jede Gerade von F_1 ist "Teilmenge von" (im Sinne von D10-2.8 oder D14-2.8) einer Geraden der Figur F_2 und genauso ist jede Ebene von F_1 in einer Ebene von F_2 enthalten.Schließlich ändern sich die Abstände der "kleineren" Figur durch die Er= weiterung nicht.Diese intuitiven Erläuterungen werden im folgenden Satz verschärft.Wir benötigen für spätere Definitionen eine eindeutige Be= ziehung zwischen Geraden und Ebenen und ihren zugehörigen Erweiterungen.Wenn $F_1 \sqsubset F_2$ gilt,so muß zu jeder Geraden α von F_1 die erweiterte Gerade β mit $\alpha < \beta$ in F_2 durch α eindeutig bestimmt sein.Analoges soll für Ebenen gelten.

T3 Sind F_1, F_2 Figuren mit $F_1 \sqsubset F_2$, so gilt

a) Es gibt eine Funktion $f_{1,2}: G_1 \to G_2$ mit

a.1) $\forall \alpha \in G_1 (\alpha < f_{1,2}(\alpha))$

a.2) $\forall \alpha \in G_1 \, \forall \beta \in G_2 (\alpha < \beta \to \beta =_2 f_{1,2}(\alpha))$

b) Es gibt eine Funktion $g_{1,2}: E_1 \to E_2$ mit

b.1) $\forall A \in E_1 (A < g_{1,2}(A))$

b.2) $\forall A \in E_1 \, \forall B \in E_2 (A < B \to B =_2 g_{1,2}(A))$

Beweis: a) Aus $F_1 \sqsubset F_2$ folgt
(1) $\forall \alpha \in G_1 \, \exists \, \beta_0 \in G_2 (\alpha < \beta_0)$
Wir setzen $f_{1,2}(\alpha) := \beta_0$, wobei β_0 gemäß (1) beliebig gewählt ist. Es sei nun $\beta \in G_2$ mit $\alpha < \beta$ gegeben. Aus $\alpha \in G_1$ folgt $\exists a, b \in P_1 (a \neq b \wedge a, b \lessdot_1 \alpha)$ nach D13-2. Aus $a, b \lessdot_1 \alpha$ und $\alpha < \beta_0$ und $\alpha < \beta$ folgt hiermit $a, b \lessdot_2 \beta_0$ und $a, b \lessdot_2 \beta$. Hieraus erhalten wir nach D13-4: $\beta =_2 \beta_0$. Damit ist β_0 durch α eindeutig bestimmt und $f_{1,2}$ eine Funktion. a.1) gilt per Definition von $f_{1,2}$ und a.2) drückt gerade die Eindeutigkeit aus.
b) Nach Voraussetzung gilt
(1) $\forall A \in E_1 \, \exists B_0 \in E_2 (A < B_0)$
Wir setzen $g_{1,2}(A) := B_0$, wobei B_0 gemäß (1) beliebig gewählt ist. Es sei $B \in E_2$ mit $A < B$ gegeben.
(2) $A \in E_1 \to \exists a, b, c \in P_1 (a, b, c \lessdot_1 A \wedge \neg \mathrm{coll}_1(a, b, c))$ nach D13-5.
(3) $a, b, c \lessdot_1 A \to a, b, c \lessdot_2 B \sqcap B_0$ da $A < B \wedge A < B_0$
(4) $\exists \alpha, \beta \in G_1 (a, b \lessdot_1 \alpha \wedge a, c \lessdot_1 \beta)$ D13-3
(5) $a, b \lessdot_1 \alpha \to a, b \lessdot_2 f_{1,2}(\alpha) =: \alpha_1$ nach T3-a.
(6) $a, c \lessdot_1 \beta \to a, c \lessdot_2 f_{1,2}(\beta) =: \beta_1$ nach T3-a.
(7) $\mathrm{coll}_2(a, b, c) \to \exists \gamma \in G_2 (a, b, c \lessdot_2 \gamma)$ D14-3

(8) $a=b \vee a=c \vee b=c \rightarrow coll_1(a,b,c)$ D13-3,D14-3

(9) $a\neq b \wedge a\neq c \wedge a,b <_2 \alpha_1 \wedge a,c <_2 \beta_1 \wedge a,b,c <_2 \gamma \rightarrow$
$\alpha_1 =_2 \gamma =_2 \beta_1$ D13-4

(1o) $coll_2(a,b,c) \wedge a\neq b\neq c\neq a \rightarrow a,b <_2 \beta_1$ (6),(7),(9)

(11) $a,b <_2 \beta_1 = f_{1,2}(\beta) \wedge a,b \in P_1 \rightarrow a,b <_1 \beta$
da $\beta < f_{1,2}(\beta)$

(12) $coll_2(a,b,c) \wedge a\neq b \wedge a\neq c \rightarrow a,b,c <_1 \beta$ (4),
(1o),(11)

(13) $coll_2(a,b,c) \rightarrow coll_1(a,b,c)$ (8),(12)

(14) $\neg coll_1(a,b,c) \rightarrow \neg coll_2(a,b,c)$ (13)

(15) $\neg coll_2(a,b,c) \wedge a,b,c <_2 B \sqcap B_o$ (2),(3),(14)

(16) $B =_2 B_o$ (15) mit D13-4 und D14-2.6

Damit ist B_o durch A eindeutig bestimmt und $g_{1,2}$ eine Funktion.

Eine weitere einfache Folgerung aus D15 ist die.

<u>T4</u> Sind F_1, F_2, F_3 Figuren,so gilt

a) $F_1 \sqsubset F_2 \sqsubset F_3 \rightarrow F_1 \sqsubset F_3$

b) $F_1 \sqsubset F_1$

c) $F_1 \sqsubset F_2 \wedge \alpha, A \in F_1 \wedge \alpha \sqsubseteq_1 A \rightarrow f_{1,2}(\alpha) \sqsubseteq_2 g_{1,2}(A)$

Beweis: a) folgt aus der Transitivität von $\subsetneq$,< und =.b) ist trivial.

c) Wir haben

(1) $\alpha \in G_1 \rightarrow \exists a,b(a\neq b \wedge a,b <_1 \alpha)$ nach D13-2

(2) $a,b <_1 \alpha \rightarrow a,b <_2 f_{1,2}(\alpha)$ nach T3

(3) $a,b <_1 \alpha \sqsubseteq_1 A \rightarrow a,b <_1 A$

(4) $a,b <_1 A \wedge A < g_{1,2}(A) \rightarrow a,b <_2 g_{1,2}(A)$ D14-9

(5) $a,b <_2 f_{1,2}(\alpha) \sqcap g_{1,2}(A)$ (1)-(4)

(6) $f_{1,2}(\alpha) \sqsubseteq_2 g_{1,2}(A)$ (5),D13-8

Wir kommen nun zu einer ziemlich komplizierten Definition,in der,wie schon angedeutet,die restlichen Axiome der Geometrie als Beziehungen zwischen Figuren formuliert werden.Wie dies ge=

schieht,möge zunächst an einem einfachen Beispiel verdeutlicht werden.Ein bekanntes Axiom der Geometrie (vergleiche D16-4) fordert, daß zwischen je zwei verschiedenen Punkten a und b stets ein weiterer Punkt c liegt.Dieses Axiom kann in unseren endlichen Figuren nicht erfüllt sein,denn aus ihm allein folgt schon, daß es unendlich viele verschiedene Punkte in der Figur geben muß.Wie aber sollen wir dieses Axiom als Beziehung zwischen Figuren darstellen? Einfach mit dem Begriff der Erweiterung von D15,der eigens zu diesem Zweck erfunden wurde.Genauer heißt das Axiom dann: Wenn in einer Figur F_1 zwei verschiedene Punkte a,b existieren,so gibt es stets eine Erweiterung F_2 von F_1 und in dieser Erweiterung F_2 einen Punkt c,sodaß c zwischen a und b (in F_2) liegt. Anstatt also von unendlichen Punktmengen auszugehen,welche die starken geometrischen Existenzaxiome erfüllen,konstruieren wir,beginnend mit einer endlichen Punktmenge, sukzessive weitere Punkte so,wie die Existenzaxiome es fordern.Für jeden neu konstruierten Punkt müssen wir zu einer Erweiterung der ursprünglichen Figur übergehen.Natürlich wird man durch Konstruktion endlich vieler neuer Punkte stets wieder eine endliche Figur erhalten.Es könnte eingewendet werden,daß eine derartige Geometrie viel zu schwach sei,denn in der vollen Geometrie brauche man einfach unendlich viele Punkte.Dazu ist zweierlei zu sagen.Erstens werden wir nicht fordern,daß nur endlich viele

Figuren betrachtet werden dürfen. Es ist durchaus erlaubt, (überabzählbar) unendlich viele Figuren gleichzeitig zu betrachten. Mit anderen Worten, wenn wir von hinreichend vielen Figuren ausgehen und den Prozeß der Erweiterung hinreichend oft anwenden, können wir genauso viele Punkte erhalten, wie sie in der klassischen Geometrie gefordert sind. Zweitens: Für eine empirische Theorie, welche praktisch angewandt werden soll, muß man obigen Einwand gerade umkehren. Er lautet dann nicht, daß unsere Formulierung zu schwach ist, sondern daß die klassische Geometrie als empirische Theorie viel zu stark ist. Tatsächlich wird man, um eine Voraussage zu machen, stets nur endlich viele Hilfspunkte in Betracht ziehen. Hierzu genügt es aber, mit endlichen Figuren und endlichen Erweiterungen zu arbeiten. Erst die Forderung, daß alle möglichen Hilfspunkte für alle möglichen Anwendungen zugleich in einem System gegeben sein müssen, führt zur unendlichen, klassischen Geometrie.(2)

<u>D16</u> Eine Figurenmenge $\mathfrak{A}$ heißt <u>abgeschlossen</u>, wenn gilt

1) $\forall F_1 \in \mathfrak{A} \; \forall A_1, B_1, a_1 \in F_1 (a_1 <_1 A_1 \sqcap_1 B_1 \rightarrow \exists F_2 \in \mathfrak{A} \exists a_2 \in F_2 (F_1 \sqsubset F_2 \wedge a_1 \neq a_2 \wedge a_2 <_2 g_{1,2}(A_1) \sqcap_2 g_{1,2}(B_1)))$

2) $\exists F_1 \in \mathfrak{A} \; \exists a_1, .., a_4 \in F_1 (\neg copl_1(a_1, .., a_4))$

3) $\forall F_1 \in \mathfrak{A} \forall a, b \in F_1 (a \neq b \rightarrow \exists F_2 \in \mathfrak{A} \; \exists c \in F_2 (F_1 \sqsubset F_2 \wedge Z_2(a, b, c)))$

4) $\forall F_1 \in \mathfrak{A}\, \forall a,b \in F_1 (a \neq b \rightarrow \exists F_2 \in \mathfrak{A} \exists c \in F_2$
$(F_1 \sqsubset F_2 \wedge Z_2(a,c,b)))$

5) $\forall F_1 \in \mathfrak{A} \forall A,\alpha,a,b,c \in F_1 (a,b,c <_1 A \wedge$
$\neg coll_1(a,b,c) \wedge \alpha \sqsubseteq_1 A \wedge Z_1(a,\alpha,b) \wedge c \not<_1 \alpha \rightarrow$
$\exists F_2 \in \mathfrak{A}(F_1 \sqsubset F_2 \wedge Z_2(b,f_{1,2}(\alpha),c)) \vee \exists F_3 \in \mathfrak{A}$
$(F_1 \sqsubset F_3 \wedge Z_3(a,f_{1,3}(\alpha),c)))$

6) $\forall F_1 \in \mathfrak{A} \forall a,b,c_1,c_2 \in F_1 (a \neq b \rightarrow \exists F_2 \in \mathfrak{A}$
$(F_1 \sqsubset F_2 \wedge \exists ! c \in F_2 (c <_2 \delta_{2,a,b} \wedge K_2(a,c/c_1,c_2))))$

7) $\forall F_1 \in \mathfrak{A} \forall a,b,a_1,b_1,c_1,a_2,\beta \in F_1 (a \neq b \wedge a,b <_1 \beta \wedge$
$\neg coll_1(a_1,b_1,c_1) \wedge a_2 \not<_1 \beta \wedge K_1(a,b/a_1,b_1) \rightarrow$
$\exists F_2 \in \mathfrak{A}\ (F_1 \sqsubset F_2 \wedge \exists ! c \in F_2 (c <_2 H_{2,f_{1,2}(\beta),a_2} \wedge$
$K_2(a,c/a_1,c_1) \wedge K_2(b,c/b_1,c_1))))$

8) Es seien $\langle F_i \rangle, \langle U_i \rangle, \langle V_i \rangle, i=1,2,3,\ldots$ Folgen, sodaß für jedes i gilt

8.1) $F_i \in \mathfrak{A}$ 8.2) $U_i \subseteq P_i, V_i \subseteq P_i$

8.3) $F_i \sqsubset F_{i+1}$ 8.4) $U_i \subseteq U_{i+1}, V_i \subseteq V_{l+1}$

Dann gelte:
$\exists a \in F_1 \forall i \in \mathbb{N} \forall a_1 \in U_i \forall b_1 \in V_i (Z_i(a,a_1,b_1)) \rightarrow$
$\exists F \in \mathfrak{A}\ (F_1 \sqsubset F \wedge \exists b \in F \forall j \in \mathbb{N} \forall a_2 \in U_j \setminus \{b\}$
$\forall b_2 \in V_j \setminus \{b\} \exists F_j \in \mathfrak{A} (F \sqsubset F_j \wedge a_2, b_2 <_j F_j \wedge$
$Z_j(a_2,b,b_2))$

9) $\forall F_1 \in \mathfrak{A} \forall A,\alpha,\alpha_1,\alpha_2,a \in F_1 (\alpha \sqsubseteq_1 A \wedge a <_1 A \wedge$
$a \not<_1 \alpha \wedge \alpha_1 \neq_1 \alpha_2 \wedge a <_1 \alpha_1 \sqcap_1 \alpha_2 \rightarrow \exists F_2 \in \mathfrak{A} (F_1 \sqsubset F_2$
$\wedge \exists c \in F_2 (c <_2 f_{1,2}(\alpha) \sqcap_2 f_{1,2}(\alpha_1))) \vee \exists F_3 \in \mathfrak{A}$
$(F_1 \sqsubset F_3 \wedge \exists c_1 \in F_3 (c_1 <_3 f_{1,3}(\alpha) \sqcap_3 f_{1,3}(\alpha_2))))$.

Beschreibt man die einzelnen Axiome von D16 in=

haltlich,so erkennt man sofort bekannte geometrische Axiome.D16-1 lautet in der üblichen Formulierung so.Haben zwei Ebenen A_1 und B_1 einen Punkt a_1 gemeinsam,so enthalten sie auch einen weiteren,von a_1 verschiedenen Punkt a_2. In unserer Formulierung liegt dieser Punkt a_2 in einer Erweiterung F_2 von F_1 und er liegt dort nicht im Durchschnitt von A_1 und B_1, sondern im Durchschnitt der zu F_2 gehörigen erweiterten Ebenen $g_{1,2}(A_1)$ und $g_{1,2}(B_1)$.2) fordert,daß mindestens in einer Figur vier nicht-co-planare Punkte vorkommen.Eine solche Figur muß dann mindestens drei Dimensionen haben.3) bedeutet,daß es zu je zwei verschiedenen Punkten a und b einen Punkt c gibt,sodaß b zwischen a und c liegt.Analog fordert 4) die Existenz eines Punktes c zwischen a und b.5) ist das sogenannte Pasch-Axiom und besagt dies. Ist α eine Gerade,welche in einer Ebene mit dem Dreieck mit Eckpunkten a,b,c liegt und zwischen a und b hindurchgeht,aber nicht durch c,so schneidet die Gerade α entweder die Strecke bc oder die Strecke ac.Daß α die Strecke bc schneidet,heißt hierbei,daß es einen Punkt a_1 auf der von b und c erzeugten Geraden gibt, welcher mit α inzidiert.Nach 6) gibt es zu je zwei Punkten c_1,c_2 auf der Halbgeraden mit Ur= sprung a durch b genau einen Punkt c,sodaß ac kongruent zu c_1c_2 ist.Zu diesem Axiom braucht man den Begriff der Halbgeraden,um die Eindeutigkeit fordern zu können.Würde man statt der Halbgeraden einfach die von a und b erzeugte Gerade nehmen, so gäbe es auf dieser zwei Punkte,welche die Kongruenz erfüllen,nämlich auf jeder Seite von a genau einen.7) besagt Folgendes.Ein Dreieck mit Eckpunkten a_1,b_1,c_1 sei vorgegeben. Dann gibt es zu jedem Punktepaar a,b,welches kongruent zu einer Seite des Dreiecks (etwa zu a_1b_1) ist und auf einer Geraden β liegt,auf der Punkt a_2 nicht liegt,genau einen Punkt c in der Halbebene mit Rand β durch a_2,sodaß die Strecken ac und bc mit den Seiten des Dreiecks a_1c_1 und b_1c_1 jeweils kongruent sind.Auch hier enthält die genaue Formulierung in der er=weiterten Figur,deren Existenz gefordert ist, nicht einfach die Gerade β ,sondern deren Er=weiterung.Wie in 6) hat der Begriff der Halb=ebene die Funktion,die Eindeutigkeit von c zu gewährleisten.8) ist das sogenannte Vollständig=keits- oder Stetigkeitsaxiom.Die übliche Formulierung lautet folgendermaßen.Sind X und Y nicht-leere Punktmengen und liegt a so,daß jeder Punkt a_1 von X zwischen einem Punkt b_1 von Y und a liegt,so gibt es einen Punkt b, welcher zwischen allen Punkten von $X\setminus\{b\}$ und $Y\setminus\{b\}$ liegt,d.h.für alle $[a_2,b_2]\in(X\setminus\{b\})\times(Y\setminus\{b\})$ gilt: $Z(a_2,b,b_2)$.Diese allgemeine Formulierung läßt für X und Y unendliche,sogar überabzählbare Mengen zu.Stellt man sich eine Gerade als die Menge der rationalen Zahlen vor,zerteilt diese an einem beliebigen Punkt in zwei Hälften und nennt die eine Hälfte X,die andere Y,so ent=spricht die obige Formulierung genau dem Voll=ständigkeitsaxiom der Analysis.Bei unserer

Formulierung dieses Axioms mittels Figuren= mengen gehen wir von der Tatsache aus,daß es sich in der Analysis unter Verwendung des Be= griffs der Zahlenfolge ausdrücken läßt.Analog erhalten wir eine Aussage über Folgen von Figuren.Diese ist kurz zu motivieren.Die Punkte von X und Y,deren Abstand minimal ist,wollen wir Randpunkte nennen.Dann konstruieren wir in X eine Folge $\langle U_i \rangle$ endlicher Punktmengen,derart,daß $U_i \subseteq U_{i+1}$ gilt und die neu hinzukommenden Punkte von U_{i+1} sich den Randpunkten von X immer mehr nähern.Genauso finden wir eine Folge $\langle V_i \rangle$ in Y. Für jedes i betrachten wir dann eine Figur,deren Punktmenge $U_i \cup V_i$ enthält (D16-8.2).Wir bekommen so eine Folge von Figuren,sodaß 8.3 gilt.Wenn es nun einen Punkt a (der zu Figur F_1 gehören möge) gibt,sodaß alle Punkte a_1 aus den U_i zwischen a und irgendeinem Punkt b_1 aus einem V_i liegen, so gibt es ein b in einer Erweiterung F von F_1, sodaß b zwischen allen Punkten $a_2 \in \bigcup\{U_i \setminus \{b\}/i \in \mathbb{N}\}$ und $b_2 \in \bigcup\{V_j \setminus \{b\}/j \in \mathbb{N}\}$ liegt.Da für solche a_2, b_2 noch nicht gewährleistet ist,daß a_2, b_2,b in einer der Figuren F_i liegen,müssen wir zu jedem Paar $[a_2, b_2]$ eine geeignete solche Erweiterung F_j betrachten.9) schließlich ist das Parallelen= axiom,welches besagt,daß es zu jeder Geraden und zu jedem Punkt in einer Ebene genau eine Parallele gibt,die durch diesen Punkt hindurch= geht.Bei unserer Formulierung benutzen wir die logisch äquivalente Form,daß von zwei ver= schiedenen Geraden α_1 und α_2,welche durch a in der Ebene A gehen,mindestens eine die vorgegebene Gerade schneidet.Auch hier müssen wir das "schneiden" so ausdrücken,daß es in einer Erweiterung $F_2 \in \mathfrak{A}$ Fortsetzungen der Geraden α und α_1 gibt,welche einen gemeinsamen Punkt c enthalten.

Eine Figurenmenge $\mathfrak{A}$,welche D16 erfüllt,ist abgeschlossen in dem Sinn,daß man weder durch geometrische Konstruktionen noch durch Stetig= keitsüberlegungen die Existenz neuer Punkte er= halten kann,welche nicht schon zu einer Figur von $\mathfrak{A}$ gehören.Da jede Figurenmenge auch eine Menge potentieller Figuren ist,ist jede abge= schlossene Figurenmenge ein Element von Pot(M_p), also ein Kandidat,welcher zum Constraint ge= hören könnte.Sneed hat seine Constraints wohl in der Absicht eingeführt,die einzelnen An= wendungen der Theorie zu einem konsistenten Ganzen zusammenzufügen.Dies wird im Wesentlichen durch den (=,=)-Constraint erreicht.Daran,daß sich unter den formalen,mengentheoretischen Be= griff des Constraint auch inhaltlich ganz andere und stärkere Forderungen subsumieren lassen,war ursprünglich nicht gedacht.Auch wenn man von dieser Möglichkeit Gebrauch macht,wie etwa Moulines (14) und wir in dieser Schrift,sollte man doch die anfängliche Konzeption im Auge be= halten.

Die Forderungen von D16 sind geometrische Axiome und haben nichts mit dem (=,=)-Constraint zu tun,deshalb müssen wir diesen noch gesondert einführen.Wir könnten den (=,=)-Constraint für die Geometrie durch Anwendung von D3-c mit x_i=d fordern.Es zeigt sich aber,daß eine andere

Definition wesentlich eleganter ist und die Beweise vieler Theoreme stark abkürzt.Diese Definition sieht zunächst stärker aus als der (=,=)-Constraint.Sie läßt sich aber -zumindest in der Geometrie- als mit dem (=,=)-Constraint äquivalent beweisen.

Da diese Forderung auch in anderen Theorien nützlich sein dürfte,wollen wir sie auch allge= mein ausdrücken.Sie lautet dann: Mit je zwei Modellen ist auch deren Vereinigung wieder ein Modell der Theorie.Die Vereinigung ist hier rein mengentheoretisch zu verstehen.Für den Fall,daß die Modelle mehrstellige Relationen enthalten, muß unter Umständen für gewisse Tupel von Objekten die Relation in passender Weise durch Definition ergänzt werden.

<u>D17</u> Eine Figurenmenge $\mathfrak{a}$ heißt <u>verträglich</u>,wenn gilt

$$\forall F_1,F_2 \in \mathfrak{a} \, \exists F_3 \in \mathfrak{a} \, (F_1,F_2 \sqsubset F_3)$$

Nun sind alle zur Definition des Kerns benötigten Begriffe definert.Es ergeben sich aber bei der Wahl des Constraints gewisse Schwierigkeiten, welche man am Besten durch Vergleich der drei in Frage kommenden Möglichkeiten erkennt.Wir definieren deshalb zunächst den Constraint für die Geometrie in drei verschiedenen Arten und daran anschließend den Kern der Geometrie, für den dann je nach Wahl des Constraint wieder drei Möglichkeiten bestehen.

D18 a) $X \in C_i$ gdw X ist eine abgeschlossene und verträgliche Figurenmenge

b) $X \in C_{it}$ gdw es gibt eine abgeschlossene, verträgliche Figurenmenge Y, sodaß $X \subseteq Y$

c) $X \in C_e$ gdw X ist eine verträgliche Figuren= menge

Eine ausführliche Diskussion verschieben wir auf Abschnitt V.Hier sei nur bemerkt,daß die Elemente von C_i (dem "idealen" Constraint) unendlich viele Figuren enthalten müssen.C_i ist also nicht transitiv.C_{it} entsteht aus C_i durch Hinzunahme der Transitivitätsforderung.C_{it} kann auch endliche Figurenmengen enthalten.C_e schließlich (der "empirische" Constraint) fordert nur die Verträg= lichkeit von Figuren,ist also,in veränderter Form,der (=,=)-Constraint.

D19 Die Kerne $K_j=[M^j_{pp},M^j_p,M^j,C^j]$ der idealen empirischen Geometrie werden für j=1,2,3 wie folgt definiert

1) M^j_{pp} ist die Menge aller partiellen möglichen Figuren für j=1,2,3

2) M^j_p ist die Menge aller möglichen Figuren für j=1,2,3

3) M^j ist die Menge aller Figuren für j=1,2,3

4) $$C^j=\begin{cases} C_i & \text{für } j=1 \\ C_{it} & \text{für } j=2 \\ C_e & \text{für } j=3 \end{cases}$$

Zur Diskussion dieser Kerne,bei der wir uns auf die mit jedem Kern formulierte empirische Behauptung beziehen,müssen wir noch etwas zur

Menge I_G der intendierten Anwendungen sagen, denn die empirische Behauptung ist ja eine Aussage über I_G.

I_G läßt sich nicht explizit angeben, sondern wird paradigmatisch bestimmt (vergleiche (22), S.198 ff). Im Falle der Geometrie ist diese Be=stimmung nicht leicht, weil sich das Interesse der Wissenschaftler im Laufe der Geschichte immer mehr von praktischen Anwendungen zu abstrakten Betrachtungen hinwandte. Eine wissen=schaftstheoretische Untersuchung müßte also weit zurückgreifen, von besonderem Gewicht wäre hier die Zeit vor Euklid. Während sich im Fall der klassischen Partikelmechanik die Wissenschafts=theorie und Wissenschaftsgeschichte schon viele Jahre und seit Kuhn (10) verstärkt mit solchen Fragen beschäftigt, scheint die Geometrie etwas vernachlässigt worden zu sein.

Da in der Neuzeit Geometrie nur "more geometrico" betrieben wurde, also ohne Beziehung auf An=wendungen, und da unsere Kompetenz für wissen=schaftshistorische Untersuchungen vernachlässig=bar gering ist, können wir nur einige kurze Be=merkungen über die intendierten Anwendungen I_G der Geometrie machen.

Erstens folgt aus unserer formalen Darstellung, daß jede intendierte Anwendung die logische Form einer partiellen möglichen Figur hat. Wenn wir die Relationen $<$, Z und K durch operationale Regeln nicht weiter festlegen, so ist die Aus=sage, etwas sei eine partielle mögliche Figur, trivial. Jede Menge von Objekten kann unter diesen Begriff fallen.

Zweitens können wir eine (notwendig nicht vollständige Liste von Beispielen angeben. Wir nennen einige Stichworte: Landvermessung, Baupläne, Tafelzeichnungen im Schulunterricht, Abstandsmessung für kleine Abstände. Zu jedem Stichwort lassen sich leicht Beispiele angeben dafür, welche Objekte eine partielle mögliche Figur bilden können und auf welche Weise die Relationen vorzustellen sind. Vielen Beispielen ist gemeinsam, daß darin Abstände eine Rolle spielen. Diese Tatsache kann jedoch nicht für eine allgemeine Charakterisierung benutzt werden, weil bekanntlich für große Entfernungen Schwierigkeiten bei den Meßmethoden entstehen.

Drittens können wir einige Beispiel angeben, die trotz gewisser Ähnlichkeiten mit den unter Zweitens Genannten keine Anwendungen der Geometrie sind: Abstandsmessung für große Abstände, Volumen und Oberflächenbestimmungen.

Nach diesen Bemerkungen über I_G definieren wir drei Theorien, von denen Eine den Namen "ideale empirische Geometrie" erhält.

<u>D20</u> a) Die Theorien T_j $(j=1,2,3)$ werden wie folgt definiert

$T_j := [K_j, I_G]$, wobei

$K_j = [M^j_{pp}, M^j_p, M^j, C^j]$ und I_G gemäß D19 und den Ausführungen über I_G gegeben sind

b) T_1 heißt <u>die ideale empirische Geometrie</u>

IV DIE ADÄQUATHEIT DER IDEALEN EMPIRISCHEN GEOMETRIE

Zunächst beweisen wir, daß keiner der drei Kerne von D19 trivial ist.

T5 (Nichttrivialität der Geometrie-Kerne)

Für $j=1,2,3$ gilt: $A(K_j) \neq Pot(M_{pp})$

Beweis: Es sei $F := [\{a,b\}, \{\alpha\}, \emptyset, \{[a,\alpha],[b,\alpha]\}, \emptyset, \emptyset]$. Man prüft leicht nach, daß F eine partielle mögliche Figur ist. Wäre $\{F\} \in A(K_j)$, so könnte man F zu einer Figur ergänzen. Nach T2-d wäre dann $[a,b/b,a] \in K$, also $K \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Definition von F.

Wir wenden uns nun der Adäquatheit zu. Die Theorien mit Kern K_1 und K_2 sind adäquat in folgendem Sinn. Jedes Element von $A(K_i), i=1,2$ läßt sich einbetten in ein Modell der Geometrie. Demnach sind die in $K_i, i=1,2$ enthaltenen Forder=ungen genauso stark wie die der Geometrie. Zunächst brauchen wir präzise Definitionen von Geometrie und Einbettung.

D21 (Bezeichnungen)

Sind P,G,E Mengen und $\prec \subseteq P \times (G \cup E), Z \subseteq P^3, K \subseteq P^4$, so verwenden wir folgende Bezeichnungen

1) Die Vereinbarungen von D10 für $\prec$, $\sqcap$ und $\sqsubseteq$ und für die Bezeichnung der Elemente von P, G und E werden übernommen
2) $Z(a,\alpha,b)$, $coll(a,b,c)$ und $copl(a_1,..,a_4)$ seien wie in D10 definiert
3) $\delta \in \mathcal{H}_a \equiv a \in P \wedge \exists b \in P(a \neq b \wedge \delta = \{c \in P / Z(a,c,b) \vee Z(a,b,c) \vee c=b\})$

4) $H \in \mathscr{E}_\alpha \equiv \alpha \in G \wedge \exists a \in P(a \not< \alpha \wedge H=\{c \in P/Z(c,\alpha,a)\})$

5) Für $\delta \in \mathscr{G}_a$ gelte $a < \delta \leftrightarrow a \in \delta$

6) Für $H \in \mathscr{E}_\alpha$ gelte $a < H \leftrightarrow a \in H$

$\mathscr{G}_a$ ist die Menge der Halbgeraden mit Ursprung a,
$\mathscr{E}_\alpha$ die Menge der Halbebenen mit Rand α.

Es folgt der Begriff der Geometrie, wie er in (3) angegeben ist.

<u>D22</u> Eine <u>Geometrie</u> ist ein Tupel $\Gamma = [P,G,E,<,Z,K]$ mit den Eigenschaften

1) P,G,E sind Mengen
2) $< \subseteq P \times (G \cup E), Z \subseteq P^3, K \subseteq P^4$
3) $\forall \alpha \exists a,b(a \neq b \wedge a,b < \alpha)$
4) $\forall a,b \exists \alpha(a,b < \alpha)$
5) $\forall a,b(a \neq b \rightarrow \forall \alpha,\beta\ (a,b < \alpha \sqcap \beta \rightarrow \alpha = \beta))$
6) $\forall A \exists a,b,c(\neg \mathrm{coll}(a,b,c) \wedge a,b,c < A)$
7) $\forall a,b,c \exists A(a,b,c < A)$
8) $\forall a,b,c(\neg \mathrm{coll}(a,b,c) \rightarrow \forall A,B(a,b,c < A \sqcap B \rightarrow A=B))$
9) $\forall \alpha \forall A(\exists a,b(a \neq b \wedge a,b < \alpha \sqcap A) \rightarrow \alpha \subseteq A)$
10) $\forall A,B(\exists a(a < A \sqcap B) \rightarrow \exists b(b \neq a \wedge b < A \sqcap B))$
11) $\exists a_1,..,a_4(\neg \mathrm{copl}(a_1,..,a_4))$
12) $\forall a,b,c(Z(a,b,c) \rightarrow \mathrm{coll}(a,b,c) \wedge a \neq b \neq c \neq a)$
13) $\forall a,b,c(Z(a,b,c) \rightarrow Z(c,b,a))$
14) $\forall a,b,c(Z(a,b,c) \rightarrow \neg Z(b,a,c))$
15) $\forall a,b,c(\mathrm{coll}(a,b,c) \wedge a \neq b \neq c \neq a \rightarrow Z(a,b,c) \vee Z(b,c,a) \vee Z(c,a,b))$
16) $\forall a,b(a \neq b \rightarrow \exists c Z(a,b,c))$
17) $\forall a,b(a \neq b \rightarrow \exists c Z(a,c,b))$
18) $\forall a,b,c,a_1(Z(a,b,c) \wedge Z(b,c,a_1) \rightarrow Z(a,b,a_1))$
19) $\forall a,b,c,a_1(Z(a,b,a_1) \wedge Z(b,c,a_1) \rightarrow Z(a,b,c))$
20) $\forall A \forall \alpha \forall a,b,c(\alpha \subseteq A \wedge a,b,c < A \wedge \neg \mathrm{coll}(a,b,c) \wedge Z(a,\alpha,b) \wedge c \not< \alpha \rightarrow Z(b,\alpha,c) \vee Z(a,\alpha,c))$

21) $\forall a,b,c(K(a,b/c,c) \rightarrow a=b)$

22) $\forall a,b(K(a,b/b,a))$

23) $\forall a,b,a_1,b_1,a_2,b_2(K(a,b/a_1,b_1) \wedge K(a,b/a_2,b_2) \rightarrow$
$K(a_1,b_1/a_2,b_2))$

24) $\forall a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2(K(a_1,b_1/a_2,b_2) \wedge$
$K(b_1,c_1/b_2,c_2) \wedge Z(a_1,b_1,c_1) \wedge Z(a_2,b_2,c_2) \rightarrow$
$K(a_1,c_1/a_2,c_2))$

25) $\forall a \, \forall \delta \in \mathcal{G}_a \, \forall b,c \, \exists! a_1(a_1 < \delta \wedge K(a,a_1/b,c))$

26) $\forall \alpha,\beta \, \forall a_1,b_1,c_1,a,a_2,b_2,c_2,b(a_1,b_1,c_1 < \alpha \wedge$
$a \nless \alpha \wedge a_2,b_2,c_2 < \beta \wedge b \nless \beta \wedge Z(a_1,b_1,c_1) \wedge$
$Z(a_2,b_2,c_2) \wedge K(a_1,b_1/a_2,b_2) \wedge K(b_1,c_1/b_2,c_2) \wedge$
$K(a,a_1/b,a_2) \wedge K(a,b_1/b,b_2) \rightarrow K(a,c_1/b,c_2))$

27) $\forall \alpha \, \forall H \in \mathcal{G}_\alpha \, \forall a,b,a_1,b_1,c_1(a \neq b \wedge a,b < \alpha \wedge$
$\neg \mathrm{coll}(a_1,b_1,c_1) \wedge K(a,b/a_1,b_1) \rightarrow$
$\exists! c(c < H \wedge K(a,c/a_1,c_1) \wedge K(b,c/b_1,c_1)))$

28) $\forall X \, \forall Y(X \subseteq P \wedge Y \subseteq P \wedge X \neq \emptyset \neq Y \wedge \exists a \, \forall b,c(b \in X \wedge c \in Y \rightarrow$
$Z(b,a,c)) \rightarrow \exists a_1 \, \forall b_1,b_2(b_1 \in X \setminus \{a_1\} \wedge b_2 \in Y \setminus \{a_1\}$
$\rightarrow Z(b_1,a_1,b_2)))$

29) $\forall A \, \forall \alpha \, \forall a(\alpha \subseteq A \wedge a < A \wedge a \nless \alpha \rightarrow \forall \beta,\gamma(\beta,\gamma \subseteq A$
$\wedge a < \beta \cap \gamma \wedge \neg \exists b(b < \alpha \cap \beta) \wedge \neg \exists c(c < \alpha \cap \gamma) \rightarrow$
$\beta = \gamma))$

Eine verbale Interpretation der komplizierten Axiome wurde bereits im Anschluß an D16 ge= geben und braucht hier nicht wiederholt zu werden. Wir können nun den Begriff der Einbettung präzisieren.

D23 Es sei $\Gamma = [P', G' E', <', Z', K']$ eine Geometrie.

a) Eine partielle mögliche Figur $[P, G, E, <, Z, K]$ heißt einbettbar in Γ, wenn gilt

1) $P \subseteq P'$
2) $\forall \alpha \in G \exists \alpha' \in G' \forall a \in P (a < \alpha \leftrightarrow a <' \alpha')$
3) $\forall A \in E \exists A' \in E' \forall a \in P (a < A \leftrightarrow a <' A')$
4) $\forall a, b, c \in P (Z(a,b,c) \leftrightarrow Z'(a,b,c))$
5) $\forall a, b, a_1, b_1 \in P (K(a,b/a_1,b_1) \leftrightarrow K'(a,b/a_1,b_1))$;

b) Eine Menge X partieller möglicher Figuren heißt einbettbar in Γ, wenn jede partielle mögliche Figur von X einbettbar in Γ ist.

Intuitiv ist F einbettbar in Γ, wenn F eine Teil=struktur von Γ ist. Insbesondere müssen die Punkte von F auch Punkte von Γ sein.

D24 Für eine Menge $\mathfrak{A}$ potentieller Figuren wird $\Gamma_{\mathfrak{A}} := [P_{\mathfrak{A}}, G_{\mathfrak{A}}, E_{\mathfrak{A}}, <_{\mathfrak{A}}, Z_{\mathfrak{A}}, K_{\mathfrak{A}}]$ wie folgt definiert

1) $P_{\mathfrak{A}} := \{a / \exists F \in \mathfrak{A} (a \in F)\}$
2) $G_{\mathfrak{A}} := \{\alpha / \exists F \in \mathfrak{A} \exists \beta \in F (\alpha = \widetilde{\beta}_F)\}$, wobei
$\widetilde{\beta}_F := \{b \in P_{\mathfrak{A}} / \exists F' \in \mathfrak{A} \exists \beta' \in F' (F \sqsubset F' \wedge \beta < \beta' \wedge b <' \beta')\}$
3) $E_{\mathfrak{A}} := \{A / \exists F \in \mathfrak{A} \exists B \in F (A = \widetilde{B}_F)\}$, wobei
$\widetilde{B}_F := \{b \in P_{\mathfrak{A}} / \exists F' \in \mathfrak{A} \exists B' \in F' (F \sqsubset F' \wedge B < B' \wedge b <' B')\}$
4) $Z_{\mathfrak{A}}(a,b,c) \leftrightarrow \exists F \in \mathfrak{A} (a,b,c \in F \wedge Z_F(a,b,c))$
5) $K_{\mathfrak{A}}(a,b/a',b') \leftrightarrow \exists F \in \mathfrak{A} (a,b,a',b' \in F \wedge K_F(a,b/a',b'))$
6) $a <_{\mathfrak{A}} \alpha \leftrightarrow a \in P_{\mathfrak{A}} \wedge \alpha \in G_{\mathfrak{A}} \wedge a \in \alpha$
7) $a <_{\mathfrak{A}} A \leftrightarrow a \in P_{\mathfrak{A}} \wedge A \in E_{\mathfrak{A}} \wedge a \in A$

Mit D24 wird nun der entscheidende Satz formuliert.

Da der Beweis von T6 ziemlich langwierig und von geringem philosophischem Interesse ist, werden wir an einigen vertretbaren Stellen auf die Ausführung des Beweises im Detail verzichten.

<u>T6</u> Ist $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene und verträgliche Figurenmenge, so ist $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ eine Geometrie.

Beweis: Wir beweisen zunächst einige Hilfssätze.

<u>Lemma 1</u> a) Sind $a,b,c\in F\in\mathfrak{A}$ und gilt $Z_F(a,b,c)$, so gilt auch $Z_{F'}(a,b,c)$ für alle F' mit $a,b,c\in F'\in\mathfrak{A}$

b) Sind $a,b,a',b'\in F\in\mathfrak{A}$ und gilt $K_F(a,b/a',b')$, so gilt auch $K_{F'}(a,b/a',b')$ für alle F' mit $a,b,a',b'\in F'\in\mathfrak{A}$

Dies folgt unmittelbar aus D13 und D17.

<u>Lemma 2</u> $\alpha=\widetilde{\beta}_F\wedge F\sqsubset F_1\wedge\beta_1\in F_1\wedge\beta<\beta_1\rightarrow\alpha=\widetilde{(\beta_1)}_{F_1}$

Beweis: Sei $b\lessdot\alpha$. Dann ist nach Voraussetzung $b\in\widetilde{\beta}_F$. Nach Definition von $\widetilde{\beta}_F$ gibt es $F'\in\mathfrak{A}$, $\beta'\in F'$ mit $b\lessdot'\beta'$ und $\beta<\beta'$. Nach D17 gibt es $F_2\in\mathfrak{A}$ mit $F,F_1\sqsubset F_2$. Sei $\beta_2:=f_{1,2}(\beta_1)\in F_2$. Da $\beta\in F$, gibt es $a,b\lessdot\beta$ mit $a\neq b$. Aus $\beta<\beta_1<\beta_2$ folgt $a,b\lessdot_2\beta_2$ und wegen $\beta<\beta'$: $a,b\lessdot'\beta'$. Sei $\beta_3:=f_{F',2}(\beta')\in F_2$, dann ist $a,b\lessdot_2\beta_3$. Aus $a,b\lessdot_2\beta_2\sqcap\beta_3\wedge\beta_2,\beta_3\in F_2$ folgt $\beta_2=_2\beta_3$, also $\beta'<\beta_2$. Daraus haben wir: $\exists F_2\in\mathfrak{A}\;\exists\beta_2\in F_2(F_1\sqsubset F_2\wedge\beta_1<\beta_2\wedge b\lessdot_2\beta_2)$, d.h. $b\in\widetilde{(\beta_1)}_{F_1}$. Sei umgekehrt $b\in\widetilde{(\beta_1)}_{F_1}$. Dann liegt b in einer Erweiterung F_1' von F_1 auf einer Geraden β_1' mit $\beta<\beta_1<\beta_1'$. Wegen T4 ist b also in α.

<u>Lemma 3</u> $F_1 \sqsubset F_2 \wedge a,b,c \in F_1 \rightarrow (\mathrm{coll}_2(a,b,c) \leftrightarrow$
$\mathrm{coll}_1(a,b,c))$

Beweis: "$\leftarrow$": $\exists \alpha \in G_1(a,b,c <_1 \alpha) \rightarrow \exists \beta := f_{1,2}(\alpha) \in G_2(a,b,c <_2 \beta)$.

"$\rightarrow$": Nach D13 gibt es $\alpha, \beta \in G_1(a,b <_1 \alpha \wedge a,c <_1 \beta)$.
Es folgt: $a,b <_2 f_{1,2}(\alpha) \wedge a,c <_2 f_{1,2}(\beta)$.Aus $\mathrm{coll}_2(a,b,c)$ erhalten wir: $\exists \gamma \in G_2(a,b,c <_2 \gamma)$.Sind zwei der Punkte a,b,c gleich,so gilt $\mathrm{coll}_1(a,b,c)$.
Wir können also annehmen,daß a,b,c paarweise verschieden sind.Dann haben wir $a,b <_2 f_{1,2}(\alpha) \wedge a,c <_2 f_{1,2}(\beta) \wedge a,b,b <_2 \gamma$.Nach D13 folgt hieraus $\gamma = f_{1,2}(\alpha) = f_{1,2}(\beta)$,also $a,b <_2 f_{1,2}(\beta)$.
Aus $F_1 \sqsubset F_2$ und $a,b \in F_1$ folgt nach D15 und T3: $a,b <_1 \beta$,also,da $c <_1 \beta$, $\mathrm{coll}_1(a,b,c)$.

<u>Lemma 4</u> $A = \widetilde{B}_F \wedge F \sqsubset F_1 \wedge B_1 \in F_1 \wedge B < B_1 \rightarrow A = \widetilde{(B_1)}_{F_1}$

Der Beweis verläuft analog zu dem von Lemma 3.
Man benutzt Lemma 3.

<u>Lemma 5</u> a) Für $\alpha, \beta \in F \in \mathfrak{A}$ gilt $\alpha = \beta \rightarrow \widetilde{\alpha}_F = \widetilde{\beta}_F$

b) Für $A,B \in F \in \mathfrak{A}$ gilt $A=B \rightarrow \widetilde{A}_F = \widetilde{B}_F$

Lemma 5 folgt unmittelbar aus den Definitionen von $\widetilde{\alpha}_F$ und $\widetilde{A}_F$.

<u>Lemma 6</u> $F_1, F_2 \in \mathfrak{A} \wedge F_1 \sqsubset F_2 \wedge \alpha \in F_1 \wedge \beta \in F_2 \wedge \alpha < \beta \rightarrow$
$\beta = f_{1,2}(\alpha)$

Beweis: Nach dem Beweis von T3 ist $f_{1,2}(\alpha)$ die einzige Gerade in F_2,welche $\alpha < f_{1,2}(\alpha)$ erfüllt.
Also ist $\beta = f_{1,2}(\alpha)$.

<u>Lemma 7</u> $F_1, F_2 \in \mathfrak{A} \wedge F_1 \sqsubset F_2 \wedge A \in F_1 \wedge B \in F_2 \wedge A < B \rightarrow$
$B = g_{1,2}(A)$

Beweis: Wie Lemma 6.

<u>Lemma 8</u> Sei $a,b,c \in F \in \mathfrak{A}$. Dann gilt
$\mathrm{coll}_F(a,b,c) \leftrightarrow \mathrm{coll}_{\Gamma_{\mathfrak{A}}}(a,b,c)$

Beweis: Es gelte $\mathrm{coll}_{\Gamma_{\mathfrak{A}}}(a,b,c)$. Dann gibt es $\alpha \in G_{\mathfrak{A}}$ mit $a,b,c \lessdot_{\mathfrak{A}} \alpha$. Hieraus folgt nach Lemma 2: $\exists F_1 \in \mathfrak{A} \; \exists \beta_1 \in F_1 (\alpha = (\widetilde{\beta_1})_{F_1} \wedge a,b,c \lessdot_1 \beta_1)$. Also gilt $\mathrm{coll}_1(a,b,c)$. Nach D17 gibt es $F_2 \in \mathfrak{A}$ mit $F, F_1 \sqsubset F_2$. Nach Lemma 3 gilt dann $\mathrm{coll}_2(a,b,c)$ und hieraus folgt wieder mit Lemma 3 $\mathrm{coll}_F(a,b,c)$.
Umgekehrt gelte $\mathrm{coll}_F(a,b,c)$, d.h. $\exists \alpha' \in F(a,b,c \lessdot_F \alpha')$.
Mit $\alpha := \widetilde{\alpha}_F \in G_{\mathfrak{A}}$ folgt dann die Behauptung.

<u>Lemma 9</u> Sei $\alpha, A \in F \in \mathfrak{A}$. Dann gilt: $\alpha \sqsubseteq A \rightarrow \widetilde{\alpha}_F \sqsubseteq \widetilde{A}_F$

Beweis: Sei $a \lessdot_{\mathfrak{A}} \alpha_F$. Es gibt $F_1 \in \mathfrak{A} \; \exists \beta \in F_1 (F \sqsubset F_1 \wedge$
$\alpha < \beta \wedge a \lessdot_1 \beta)$. Nach Lemma 6 ist $\beta = f_{F,1}(\alpha)$. Nach T3-c folgt $f_{F,1}(\alpha) \sqsubseteq g_{F,1}(A) =: B$ also $a \lessdot_1 B$. Es gibt daher $F_1 \in \mathfrak{A} \; \exists B \in F_1 (F \sqsubset F_1 \wedge A < B \wedge a \lessdot_1 B)$,
d.h. $a \lessdot_{\mathfrak{A}} \widetilde{A}_F$.

<u>Lemma 10</u> $F \in \mathfrak{A} \wedge a,A,B \in F \wedge a \lessdot_F A \sqcap B \rightarrow a \lessdot_{\mathfrak{A}} \widetilde{A}_F \sqcap \widetilde{B}_F$

Beweis: Aus $a \lessdot_F A$ und T3-b folgt $a \lessdot_{\mathfrak{A}} \widetilde{A}_F$. Aus $a \lessdot_F B$ und T3-b folgt $a \lessdot_{\mathfrak{A}} \widetilde{B}_F$, also $a \lessdot_{\mathfrak{A}} \widetilde{A}_F \sqcap \widetilde{B}_F$.

<u>Lemma 11</u> Für $a_1, .., a_4 \in F \in \mathfrak{A}$ gilt
$\mathrm{copl}_{\Gamma_{\mathfrak{A}}}(a_1, .., a_4) \rightarrow \mathrm{copl}_F(a_1, .., a_4)$

Beweis:

Wir zeigen zunächst: Für $F \sqsubset F' \in \mathfrak{A}$ gilt

(+) $copl_{F'}(a_1,..,a_4) \to copl_F(a_1,..,a_4)$

Sind drei der a_i in F co-linear, so gilt (+). Wir können also annehmen, daß je drei der a_i in F nicht co-linear sind. Wir betrachten die von a_1,a_2,a_3 in F erzeugte Ebene A. Aus $copl_{F'}(a_1,..,a_4)$ folgt, daß es in F' eine Ebene B' gibt mit $a_1,..,a_4 <' B'$. Aus $a_1,..,a_3 <_F A < f_{F,F'}(A) =: B$ folgt somit: $a_1,..,a_3 <' B \sqcap B'$, also $B =_F B'$.

Wir haben daher $a_1,..,a_4 <' B$. Hieraus folgt nach D14-9: $a_1,..,a_4 <_F A$, also $copl_F(a_1,..,a_4)$.

Mit (+) können wir nun Lemma 11 beweisen. Aus $copl_{\Gamma\mathfrak{A}}(a_1,..,a_4)$ folgt $\exists A \in E_{\mathfrak{A}}(a_1,..,a_4 <_{\mathfrak{A}} A)$ und hieraus $\exists F_1 \in \mathfrak{A}\ \exists A_1 \in F_1(a_1,..,a_4 <_1 A_1 \wedge A = \widetilde{(a_1)}_{F_1})$, d.h. $copl_1(a_1,..,a_4)$. Wir wählen $F_2 \in \mathfrak{A}$ mit $F, F_1 \sqsubset F_2$, dann gilt $copl_2(a_1,..,a_4)$ und hieraus folgt mit (+) $copl_F(a_1,..,a_4)$.

<u>Lemma 12</u> Für $a,b,c \in F \in \mathfrak{A}$ gilt:

$$Z_{\mathfrak{A}}(a,b,c) \to Z_F(a,b,c)$$

Dies folgt aus Lemma 1a.

<u>Lemma 13</u> Für $a,b,a',b' \in F \in \mathfrak{A}$ gilt:

$$K_{\mathfrak{A}}(a,b/a',b') \to K_F(a,b/a',b')$$

Beweis: Lemma 1b.

<u>Lemma 14</u> Aus $a,b,\beta \in F \in \mathfrak{A}$, $\alpha \in G_{\mathfrak{A}}$, $b \not< _{\mathfrak{A}} \alpha$, $\alpha = \widetilde{\beta}_F$ und $Z_F(a,\beta,b)$ folgt $Z_{\mathfrak{A}}(a,\alpha,b)$

Beweis: 1) $Z_F(a,\beta,b) \to a,b <_F \beta \wedge \exists c(c <_F \beta \wedge Z_F(a,c,b))$

2) $c <_F \beta \wedge \alpha = \widetilde{\beta}_F \to c <_{\mathfrak{A}} \alpha$

3) $Z_F(a,c,b) \to Z_{\mathfrak{A}}(a,c,b)$

Annahme: $a \lessdot_{\mathfrak{a}} \alpha$

4) $\exists F_1 \exists \beta_1 \in F_1 (F \sqsubset F_1 \wedge \beta < \beta_1 \wedge a \lessdot_1 \beta_1)$

5) $\alpha = (\widetilde{\beta_1})_{F_1} \wedge c \lessdot_1 \beta_1 \wedge b \not\lessdot_1 \beta_1$

6) $Z_F(a,c,b) \rightarrow Z_1(a,c,b) \rightarrow \exists \beta_2 \in F_1 (a,c,b \lessdot_1 \beta_2)$

7) $Z_1(a,c,b) \rightarrow a \neq c$

8) $a \neq c \wedge a,c \not\lessdot_1 \beta_1 \sqcap \beta_2 \rightarrow \beta_1 =_1 \beta_2$

9) $b \not\lessdot_1 \beta_1$ aus 6) und 8)

10) $b \lessdot_{\mathfrak{a}} \alpha$ im Widerspruch zur Voraussetzung

11) $a \not\lessdot_{\mathfrak{a}} \alpha$ aus 10)

12) $a,b \not\lessdot_{\mathfrak{a}} \alpha \wedge \exists c (c \lessdot_{\mathfrak{a}} \alpha \wedge Z_{\mathfrak{a}}(a,c,b))$ 2),3),11)

13) $Z_{\mathfrak{a}}(a,\alpha,b)$

<u>Lemma 15</u> $F_1 \sqsubset F_2 \wedge \gamma \in F_1 \wedge \beta = f_{1,2}(\gamma) \wedge b \not\lessdot_1 \gamma \wedge$
$b \not\lessdot_2 \beta \wedge a \not\lessdot_1 H_{1,\gamma,b} \rightarrow a \lessdot_2 H_{2,\beta,b}$

Beweis: 1) $c \lessdot_1 H_{1,\gamma,b} \rightarrow a,b \not\lessdot_1 \gamma \wedge \exists c (Z_1(a,c,b) \wedge$
$c \lessdot_1 \gamma)$

2) $\exists c (Z_2(a,c,b) \wedge c \lessdot_2 \beta) \wedge b \not\lessdot_2 \beta$

3) $a \lessdot_2 \beta \rightarrow a \lessdot_1 \gamma$ da $\gamma < \beta \wedge a \in P_1$

4) $a \not\lessdot_2 \beta$ 3) und 1)

5) $Z_2(a,\beta,b)$ 2) und 4)

6) $a \lessdot_2 H_{2,\beta,b}$

Wir kommen nun zum Beweis von T6. Offenbar sind $P_{\mathfrak{a}}, G_{\mathfrak{a}}, E_{\mathfrak{a}}$ Mengen, $\lessdot_{\mathfrak{a}} \subseteq P_{\mathfrak{a}} \times (G_{\mathfrak{a}} \cup E_{\mathfrak{a}})$. Weiter gilt $Z_{\mathfrak{a}} \subseteq P_{\mathfrak{a}}^3$ und $K_{\mathfrak{a}} \subseteq P_{\mathfrak{a}}^4$. Wir beweisen nun die Eigenschaften 3)-27) von D22.

<u>D22-3</u> $\forall \alpha \in G_{\mathfrak{a}} \exists a,b \in P_{\mathfrak{a}} (a \neq b \wedge a,b \lessdot_{\mathfrak{a}} \alpha)$

Beweis: Sei $\alpha \in G_{\mathfrak{a}}$. Dann gibt es $F \in \mathfrak{a}$ und $\beta \in F$, sodaß $\alpha = \widetilde{\beta}_F$. $\beta \in F \rightarrow \exists a,b \in F (a \neq b \wedge a,b \lessdot_F \beta)$ nach D13. Dann sind $a,b \in P_{\mathfrak{a}}$ und $a,b \lessdot_{\mathfrak{a}} \alpha$ nach T4-b.

<u>D22-4</u> $\forall a,b \in P_{\mathfrak{A}}\ \exists \alpha \in G_{\mathfrak{A}}(a,b <_{\mathfrak{A}} \alpha)$

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen. Man benutzt T4-b.

<u>D22-5</u> $\forall a,b \in P_{\mathfrak{A}}(a \neq b \to \forall \alpha,\beta \in G_{\mathfrak{A}}(a,b <_{\mathfrak{A}} \alpha \sqcap \beta \to \alpha = \beta))$

Beweis: Seien a,b,α,β gegeben mit $a,b <_{\mathfrak{A}} \alpha \sqcap \beta$. Es gibt Figuren $F_1,..,F_4 \in \mathfrak{A}$, sodaß gilt: $a \in F_1$, $b \in F_2$, $\exists \gamma_3 \in F_3(\alpha = (\widetilde{\gamma_3})_{F_3})$ und $\exists \gamma_4 \in F_4(\beta = (\widetilde{\gamma_4})_{F_4})$. Nach D17 gibt es $F_5 \in \mathfrak{A}$ mit $F_1,..,F_4 \sqsubset F_5$, also $a,b,f_{3,5}(\gamma_3),f_{4,5}(\gamma_4) \in F_5$. Nach Lemma 2 ist $\alpha = \left[\widetilde{f_{3,5}(\gamma_3)}\right]_{F_5}$ und $\beta = \left[\widetilde{f_{4,5}(\gamma_4)}\right]_{F_5}$. Aus $a,b <_{\mathfrak{A}} \alpha \sqcap \beta$ folgt, daß es F_6,F_7 gibt mit $F_5 \sqsubset F_6,F_7$ und $\exists \beta_6 \in F_6(f_{3,5}(\gamma_3) < \beta_6)$ und $\exists \beta_7 \in F_7(f_{4,5}(\gamma_4) < \beta_7)$ und $a,b <_6 \beta_6 \wedge a,b <_7 \beta_7$. Aus Lemma 6 folgt, daß $\beta_6 = f_{5,6}(f_{3,5}(\gamma_3))$ und $\beta_7 = f_{5,7}(f_{4,5}(\gamma_4))$. Wegen $a,b \in F_5$ folgt hieraus $a,b <_5 f_{3,5}(\gamma_3)$ und $a,b <_5 f_{4,5}(\gamma_4)$. Aus $a \neq b$ und $a,b <_5 f_{3,5}(\gamma_3) \sqcap f_{4,5}(\gamma_4)$ folgt aber $f_{3,5}(\gamma_3) = f_{4,5}(\gamma_4)$ nach D13. Man erhält nun die Behauptung mit Lemma 5a.

<u>D22-6</u> $\forall A \in E_{\mathfrak{A}}\ \exists a,b,c \in P_{\mathfrak{A}}\ (\neg \mathrm{coll}_{\Gamma_{\mathfrak{A}}}(a,b,c) \wedge a,b,c <_{\mathfrak{A}} A)$

Beweis: Man benutzt Lemma 8.

<u>D22-7</u> $\forall a,b,c \in P_{\mathfrak{A}}\ \exists A \in E_{\mathfrak{A}}\ (a,b,c <_{\mathfrak{A}} A)$

Beweis: Nach D17 gibt es $F \in \mathfrak{A}$ mit $a,b,c \in F$. Gilt $\neg \mathrm{coll}_F(a,b,c)$, so folgt nach D13 $\exists A' \in F$ $(a,b,c <_F A')$. Mit $A := (\widetilde{A'})_F \in E_{\mathfrak{A}}$ erhält man die Be=

hauptung. Es gelte nun $\mathrm{coll}_F(a,b,c)$. Nach D16 gibt es $F' \in \mathfrak{A}$ und $a_1,..,a_4 \in F'$ mit $\mathrm{copl}_F(a_1,..,a_4)$. Nach D17 gibt es F_2 mit $F,F' \sqsubset F_2$. In F_2 findet man nun eine Ebene $B \in F_2$ mit $a,b,c \lessdot_2 B$. Mit $A := \widetilde{B}_{F_2} \in E_{\mathfrak{A}}$ folgt dann die Behauptung.

<u>D22-8</u> $\forall a,b,c \in P_{\mathfrak{A}} (\neg \mathrm{coll}_{\Gamma_{\mathfrak{A}}}(a,b,c) \rightarrow \forall A,B \in E_{\mathfrak{A}}$
$(a,b,c \lessdot_{\mathfrak{A}} A \sqcap B \rightarrow A=B))$

Beweis: Analog zu D22-5. Man benutzt Lemmata 4,5, 7 und 8.

<u>D22-9</u> $\forall \alpha \in G_{\mathfrak{A}}\ \forall A \in E_{\mathfrak{A}} (\exists a,b \in P_{\mathfrak{A}} (a \neq b \wedge a,b \lessdot_{\mathfrak{A}} \alpha \sqcap A)$
$\rightarrow \alpha \sqsubseteq A)$

Beweis: Es seien α,A,a,b gegeben mit $a \neq b \wedge a,b \lessdot_{\mathfrak{A}} \alpha \sqcap A$. Es gibt Figuren $F_1,..,F_4 \in \mathfrak{A}$ mit $a \in F_1, b \in F_2$, $\exists \beta \in F_3 (\alpha = \widetilde{\beta}_{F_3})$ und $\exists B \in F_4 (A = \widetilde{B}_{F_4})$. Nach D17 gibt es $F_5 \in \mathfrak{A}$ mit $F_1,..,F_4 \sqsubset F_5$, also $a,b,\gamma := f_{3,5}(\beta), C := g_{4,5}(B) \in F_5$. Aus $a,b \lessdot_{\mathfrak{A}} \alpha \sqcap A$ folgt, daß es $F_6,F_7 \in \mathfrak{A}$ gibt mit $F_5 \sqsubset F_6,F_7$ und $\exists \alpha_6 \in F_6$ $(a,b \lessdot_6 \alpha_6 \wedge \gamma < \alpha_6)$ und $\exists A_7 \in F_7 (a,b \lessdot_7 A_7 \wedge C < A_7)$. Nach Lemma 6 und Lemma 7 ist $\alpha_6 = f_{5,6}(\gamma)$ und $A_7 = g_{5,7}(C)$. Wegen $a,b \in F_5 \sqsubset F_6,F_7$ gilt also $a,b \lessdot_5 \gamma \sqcap C$. Da $a \neq b$, folgt $\gamma \sqsubseteq C$ nach D13. Nach Lemma 2 ist $\alpha = \widetilde{\gamma}_{F_5}$ und $A = \widetilde{C}_{F_5}$. $\alpha \sqsubseteq A$ erhält man nun mit Lemma 9.

<u>D22-10</u> $\forall A,B \in E_{\mathfrak{A}} (\exists a \in P_{\mathfrak{A}} (a \lessdot_{\mathfrak{A}} A \sqcap B) \rightarrow \exists b \in P_{\mathfrak{A}}$
$(a \neq b \wedge b \lessdot_{\mathfrak{A}} A \sqcap B))$

Beweis: Seien a,A,B gegeben mit $a \lessdot_{\mathfrak{A}} A \sqcap B$. Wie in den bisherigen Beweisen findet man $F \in \mathfrak{A}$ mit $a \in F$,

$\exists A_1 \in F(A=(\widetilde{A_1})_F)$, $\exists B_1 \in F(B=(\widetilde{B_1})_F)$ und $a <_F A_1 \sqcap B_1$.
Nach D16 gibt es $F_1 \in \mathfrak{A}$ und $b \in F_1$, sodaß $F \sqsubset F_1$
$a \neq b \wedge b <_1 g_{F,1}(A_1) \sqcap g_{F,1}(B_1)$. Nach Lemma 4 ist
$A=\left[\widetilde{g_{F,1}(A_1)}\right]_{F_1}$ und $B=\left[\widetilde{g_{F,1}(B_1)}\right]_{F_1}$ und aus Lemma 10 folgt die Behauptung.

<u>D22-11</u> $\exists a_1,..,a_4 \in P_{\mathfrak{A}} (\neg \operatorname{copl}_{\Gamma_{\mathfrak{A}}}(a_1,..,a_4))$

Beweis: D16 und Lemma 11.

<u>D22-12</u> $\forall a,b,c \in P_{\mathfrak{A}} (Z_{\mathfrak{A}}(a,b,c) \rightarrow \operatorname{coll}_{\mathfrak{A}}(a,b,c) \wedge a \neq b \neq c \neq a)$

Beweis: D13 und Lemma 8.

<u>D22-13</u> $\forall a,b,c \in P_{\mathfrak{A}} (Z_{\mathfrak{A}}(a,b,c) \rightarrow Z_{\mathfrak{A}}(c,b,a))$

Beweis: T2-a.

<u>D22-14</u> $\forall a,b,c \in P_{\mathfrak{A}} (Z_{\mathfrak{A}}(a,b,c) \rightarrow \neg Z_{\mathfrak{A}}(b,a,c))$

Beweis: Es gibt $F \in \mathfrak{A}$ mit $Z_F(a,b,c)$. Wir nehmen an, es gelte $Z_{\mathfrak{A}}(b,a,c)$, d.h. $\exists F_1 \in \mathfrak{A}$ mit $Z_1(b,a,c)$. Nach D17 gibt es $F_2 \in \mathfrak{A}$ mit $F, F_1 \sqsubset F_2$. Dann gilt nach Lemma 1: $Z_2(a,b,c)$ und $Z_2(b,a,c)$. Aber aus $Z_2(a,b,c)$ folgt mit T2-b $\neg Z_2(b,a,c)$. Damit ist die Annahme widerlegt.

<u>D22-15</u> $\forall a,b,c \in P_{\mathfrak{A}} (\operatorname{coll}_{\Gamma_{\mathfrak{A}}}(a,b,c) \wedge a \neq b \neq c \neq a \rightarrow Z_{\mathfrak{A}}(a,b,c) \vee Z_{\mathfrak{A}}(b,c,a) \vee Z_{\mathfrak{A}}(c,a,b))$

Beweis: D13 und Lemma 8.

<u>D22-16</u> $\forall a,b \in P_{\mathfrak{A}} (a \neq b \rightarrow \exists c \in P_{\mathfrak{A}} (Z_{\mathfrak{A}}(a,b,c))$

Beweis: D16.

<u>D22-17</u> $\forall a,b \in P_{\mathfrak{A}} (a \neq b \rightarrow \exists c \in P_{\mathfrak{A}} (Z_{\mathfrak{A}}(a,c,b))$

Beweis: D16.

<u>D22-18</u> $\forall a,b,c,a' \in P_{\mathfrak{A}} (Z_{\mathfrak{A}}(a,b,c) \wedge Z_{\mathfrak{A}}(a,b,a') \rightarrow$

$Z_{\alpha}(a,b,a'))$

Beweis: D13.

D22-19 $\forall a,b,c,a' \in P_{\alpha}(Z_{\alpha}(a,b,a') \wedge Z_{\alpha}(b,c,a') \rightarrow Z_{\alpha}(a,b,c))$

Beweis: D13.

D22-20 $\forall A \in E_{\alpha}\ \forall \alpha \in G_{\alpha}\ \forall a,b,c \in P_{\alpha}\ (\alpha \sqsubseteq A \wedge a,b,c <_{\alpha} A \wedge \neg\, \mathrm{coll}_{\Gamma\alpha}(a,b,c) \wedge Z_{\alpha}(a,\alpha,b) \wedge c \not<_{\alpha} \alpha \rightarrow Z_{\alpha}(b,\alpha,c) \vee Z_{\alpha}(a,\alpha,c))$

Beweis: Aus D17 bekommen wir ein $F \in \alpha$ mit $a,b,c \in F \wedge \exists B \in F(A=\widetilde{B}_F) \wedge \exists \beta \in F(\alpha = \widetilde{\beta}_F) \wedge a,b,c <_F B.$

1) $\beta \in F \rightarrow \exists a_1,a_2 \in F(a_1 \neq a_2 \wedge a_1,a_2 <_F \beta)$

2) $a_1,a_2 <_F \beta \rightarrow a_1,a_2 <_{\alpha} \alpha \rightarrow a_1,a_2 <_{\alpha} A$

3) $\exists F_1 \in \alpha\ (F \sqsubset F_1 \wedge \exists B_1 \in F_1(A=(\widetilde{B_1})_{F_1} \wedge a_1,a_2 <_1 B_1 \wedge a_1,a_2 <_1 f_{F,1}(\beta) =: \gamma_1))$

4) $a,b,c \in F_1 \wedge \gamma_1, B_1 \in F_1 \wedge A=(\widetilde{B_1})_{F_1} \wedge \alpha=(\widetilde{\gamma_1})_{F_1} \wedge \gamma_1 \sqsubseteq B_1 \wedge a,b,c <_1 B_1$ aus 3)

5) $Z_{\alpha}(a,\alpha,b) \rightarrow \exists F_2 \in \alpha\ \exists \beta_2 \in F_2(F_1 \sqsubset F_2 \wedge \gamma_1 < \beta_2 \wedge a_1 <_2 \beta_2) \wedge \exists F_3 \in \alpha\ (Z_3(a,a_1,b))$

6) $\exists F_4 \in \alpha\ (F_2,F_3 \sqsubset F_4 \wedge a,b,c, f_{1,2}(f_{2,4}(\gamma_1)) =: \gamma_4, g_{1,2}(g_{2,4}(B_1)) =: B_4 \in F_4 \wedge A=(\widetilde{B_4})_{F_4} \wedge \alpha=(\widetilde{\gamma_4})_{F_4} \wedge \gamma_4 \sqsubseteq B_4 \wedge a,b,c <_4 B_4 \wedge a_1 <_4 \gamma_4 \wedge Z_4(a,a_1,b) \wedge a,b \not<_4 \gamma_4 \wedge \neg\, \mathrm{coll}_4(a,b,c) \wedge c \not<_4 \gamma_4)$ aus 5) mit Lemma 6, Lemma 8 und T4-c.

7) $\gamma_4 \sqsubseteq B_4 \wedge a,b,c <_4 B_4 \wedge \neg\, \mathrm{coll}_4(a,b,c) \wedge Z_4(a,\gamma_4,b) \wedge c \not<_4 \gamma_4$ aus 6)

8) $\exists F_5 \in \alpha\ (F_4 \sqsubset F_5 \wedge Z_5(b, f_{4,5}(\gamma_4), c)) \vee$

$\vee \exists F_6 \in \alpha \, (F_4 \sqsubset F_6 \wedge Z_6(a, f_{4,6}(\gamma_4), c))$
aus 7) und D16.

9) $b,c \nleq_\alpha \alpha \wedge a,c \nleq_\alpha \alpha$ aus $Z_\alpha(a,\alpha,b)$ und Voraus.

1o) $Z_5(b,f_{4,5}(\gamma_4),c) \rightarrow b,c \nleq_5 f_{4,5}(\gamma_4) \wedge \exists b_1 <_5 f_{4,5}(\gamma_4)(Z_5(b,b_1,c))$

11) $Z_6(a,f_{4,6}(\gamma_4),c) \rightarrow a,c \nleq_6 f_{4,6}(\gamma_4) \wedge \exists c_1 <_6 f_{4,6}(\gamma_4) \; (Z_6(a,c_1,c))$

12) $(Z_5(b,b_1,c) \rightarrow Z_\alpha(b,b_1,c)) \wedge (b_1 <_5 f_{4,5}(\gamma_4) \rightarrow b_1 <_\alpha \alpha)$

13) $Z_6(a,c_1,c) \rightarrow Z_\alpha(a,c_1,c)$

14) $c_1 <_6 f_{4,6}(\gamma_4) \rightarrow c_1 <_\alpha \alpha$

15) $Z_\alpha(b,\alpha,c) \vee Z_\alpha(c,\alpha,a)$ aus 9)-13)

<u>D22-21</u> $\forall a,b,c \in P_\alpha (K_\alpha(a,b/c,c) \rightarrow a=b)$

Beweis: T2-c.

<u>D22-22</u> $\forall a,b \in P_\alpha \; (K_\alpha(a,b/b,a))$

Beweis: T2-d.

<u>D22-23</u> $\forall a,b,a',b',a_1,b_1 \in P_\alpha \; (K_\alpha(a,b/a',b') \wedge K_\alpha(a,b/a_1,b_1) \rightarrow K_\alpha(a',b'/a_1,b_1))$

Beweis: T2-e.

<u>D22-24</u> $\forall a,b,c,a',b',c' \in P_\alpha \; (K_\alpha(a,b/a',b') \wedge K_\alpha(b,c/b',c') \wedge Z_\alpha(a,b,c) \wedge Z_\alpha(a',b',c') \rightarrow K_\alpha(a,c/a',c'))$

Beweis: T2-f.

<u>D22-25</u> $\forall a \in P_\alpha \; \forall \delta \in \mathcal{G}_a \; \forall b,c \in P_\alpha \, \exists ! a_1 \in P_\alpha \; (a_1 <_\alpha \delta \wedge K_\alpha(a,a_1/b,c))$

Beweis: Seien a,b,c,δ gegeben. $\delta \in \mathcal{G}_a \rightarrow \exists a_2 \neq a$
$(\delta = \{c \in P_\alpha / Z_\alpha(a,c,a_2) \vee Z_\alpha(a,a_2,c) \vee c=a_2\})$.

Es gibt $F \in \mathfrak{A}$ mit $a,b,c,a_2 \in F \wedge a \neq a_2$. Nach D16 gibt es ein $F_1 \in \mathfrak{A}$ und genau ein $a_1 \in F_1$, sodaß $F \sqsubset F_1 \wedge a_1 <_1 \delta_{1,a,a_2} \wedge K_1(a,a_1/b,c)$. Es gibt also $a_1 \in P_{\mathfrak{A}}$ mit $K_{\mathfrak{A}}(a,a_1/b,c)$.

1) $a_1 <_1 \delta_{1,a,a_2} \rightarrow Z_1(a,a_1,a_2) \vee Z_1(a,a_2,a_1) \vee a_1 = a_2$

2) $(Z_1(a,a_1,a_2) \rightarrow Z_{\mathfrak{A}}(a,a_1,a_2)) \wedge (Z_1(a,a_2,a_1) \rightarrow$
$Z_{\mathfrak{A}}(a,a_2,a_1))$ Lemma 1

3) $a_1 <_1 \delta_{1,a,a_2} \rightarrow a_1 <_{\mathfrak{A}} \delta$

4) $\exists a_1 \in P_{\mathfrak{A}} (a_1 <_{\mathfrak{A}} \delta \wedge K_{\mathfrak{A}}(a,a_1/b,c))$

Da a_1 nur in F_1 eindeutig bestimmt ist, müssen wir die die Eindeutigkeit in $P_{\mathfrak{A}}$ noch beweisen. Dazu sei $a_3 \in P_{\mathfrak{A}}$ mit $a_3 <_{\mathfrak{A}} \delta \wedge K_{\mathfrak{A}}(a,a_3/b,c)$ gegeben. Es gibt $F_2 \in \mathfrak{A}\ (F_1 \sqsubset F_2 \wedge a,b,c,a_1,a_2,a_3 \in F_2)$. Da $a \neq a_2$, folgt aus D16: $\exists F_3 \in \mathfrak{A}\ \exists! a_4 \in F_3 (F_2 \sqsubset F_3 \wedge a_4 <_3 \delta_{3,a,a_2} \wedge K_3(a,a_4/b,c))$. Hieraus folgt

5) $\forall a_5 \in F_3 (a_5 <_3 \delta_{3,a,a_2} \wedge K_3(a,a_5/b,c) \rightarrow a_4 = a_5)$
Wir setzen $a_5 := a_1$

6) $F_1 \sqsubset F_3 \wedge a_1 <_1 \delta_{1,a,a_2} \rightarrow a_1 <_3 \delta_{3,a,a_2}$

7) $F_1 \sqsubset F_3 \wedge K_1(a,a_1/b,c) \rightarrow K_3(a,a_1/b,c)$ Lemma 1

8) $a_1 = a_4$ aus 5)-7)

Wir setzen $a_5 := a_3$ in 5)

9) $a_3 <_{\mathfrak{A}} \delta \rightarrow a_3 = a_2 \vee Z_{\mathfrak{A}}(a,a_3,a_2) \vee Z_{\mathfrak{A}}(a,a_2,a_3)$

10) $Z_{\mathfrak{A}}(a,a_3,a_2) \rightarrow Z_3(a,a_3,a_2)$ Lemma 12

11) $Z_{\mathfrak{A}}(a,a_2,a_3) \rightarrow Z_3(a,a_2,a_3)$ Lemma 12

12) $a_3 <_{\mathfrak{A}} \delta \rightarrow a_3 <_3 \delta_{3,a,a_2}$ aus 9)-12)

13) $K_{\mathfrak{A}}(a,a_3/b,c) \rightarrow K_3(a,a_3/b,c)$ Lemma 13

14) $a_3 <_3 \delta_{3,a,a_2} \wedge K_3(a,a_3/b,c)$ 12) und 13)

15) $a_3=a_4$ aus 5) und 14)

16) $a_1=a_3$ aus 8) und 15). Damit a_1 auch in $P_{\mathfrak{A}}$ eindeutig bestimmt.

<u>D22-26</u> $\forall \alpha,\beta \in G_{\mathfrak{A}}\ \forall a,b,a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 \in P_{\mathfrak{A}}$

$(a_1,b_1,c_1 <_{\mathfrak{A}} \alpha \wedge a \nless_{\mathfrak{A}} \alpha \wedge a_2,b_2,c_2 <_{\mathfrak{A}} \beta \wedge b \nless_{\mathfrak{A}} \beta \wedge$

$Z_{\mathfrak{A}}(a_1,b_1,c_1) \wedge Z_{\mathfrak{A}}(a_2,b_2,c_2) \wedge K_{\mathfrak{A}}(a_1,b_1/a_2,b_2)$

$\wedge K_{\mathfrak{A}}(b_1,c_1/b_2,c_2) \wedge K_{\mathfrak{A}}(a,a_1/b,a_2)$

$\wedge K_{\mathfrak{A}}(a,b_1/b,b_2) \rightarrow K_{\mathfrak{A}}(a,c_1/b,c_2))$

Beweis: D13, Lemma 12 und Lemma 13.

<u>D22-27</u> $\forall \alpha \in G_{\mathfrak{A}}\ \forall H \in \mathcal{E}_{\alpha} \forall a,b,a_1,b_1,c_1 \in P_{\mathfrak{A}}$
$(a \neq b \wedge a,b <_{\mathfrak{A}} \alpha \wedge \neg coll_{\Gamma_{\mathfrak{A}}}(a_1,b_1,c_1) \wedge$

$K_{\mathfrak{A}}(a,b/a_1,b_1) \rightarrow \exists! c \in P_{\mathfrak{A}}\ (c <_{\mathfrak{A}} H \wedge$

$K_{\mathfrak{A}}(a,c/a_1,c_1) \wedge K_{\mathfrak{A}}(b,c/b_1,c_1))$

Beweis: Es gibt $F \in \mathfrak{A}$ mit $a,b,a_1,b_1,c_1,\beta \in F$ und $a \neq b \wedge a,b <_F \beta \wedge \neg\, coll_F(a_1,b_1,c_1) \wedge$

$K_F(a,b/a_1,b_1) \wedge \alpha = \widetilde{\beta}_F \wedge a_2 \nless_F \beta$ nach Lemma 8 und Lemma 13. Nach D16 gibt es dann $F_1 \in \mathfrak{A}$ mit $F \sqsubset F_1$

$\wedge \exists! c \in F_1 (c <_1 H_{1,f_{F,1}(\beta),a_2} \wedge K_1(a,c/a_1,c_1) \wedge$

$K_1(b,c/b_1,c_1) \wedge \alpha = \widetilde{\gamma}_{F_1})$ mit $\gamma := f_{F,1}(\beta)$. Es gilt

1) $c <_{\mathfrak{A}} P_{\mathfrak{A}} \wedge K_{\mathfrak{A}}(a,c/a_1,c_1) \wedge K_{\mathfrak{A}}(b,c/b_1,c_1)$

2) $c <_1 H_{1,f_{F,1}(\beta),a_2} \rightarrow Z_1(c,\gamma,a_2)$

3) $Z_1(c,\gamma,a_2) \wedge \alpha = \widetilde{\gamma}_{F_1} \rightarrow Z_{\mathfrak{A}}(c,\alpha,a_2)$ Lemma 14, falls $a_2 \nless_{\mathfrak{A}} \alpha$

4) $c <_{\alpha} H \wedge K_{\alpha}(a,c/a_1,c_1) \wedge K_{\alpha}(b,c/b_1,c_1)$ aus 1),2) und 3)

Da c nur in F_1 eindeutig bestimmt ist, müssen wir die Eindeutigkeit in P_{α} noch beweisen. Dazu sei $c_2 \in P_{\alpha}$ mit

5) $c_2 <_{\alpha} H \wedge K_{\alpha}(a,c_2/a_1,c_1) \wedge K_{\alpha}(b,c_2/b_1,c_1)$

6) $c_2 <_{\alpha} H \to Z_{\alpha}(c_2,\alpha,a_2) \to c_2,a_2 \nless_{\alpha} \alpha \wedge \exists c_3 <_{\alpha} \alpha \wedge Z_{\alpha}(c_2,c_3,a_2))$

7) $\exists F_2 \in \mathfrak{A} (F_1 \sqsubset F_2 \wedge c_2,c_3 \in F_2 \wedge \exists \gamma_2 \in F_2(\gamma < \gamma_2 \wedge \alpha = (\widetilde{\gamma_2})_{F_2} \wedge c_3 <_2 \gamma_2 \wedge Z_2(c_2,c_3,a_2))$

8) $a,b,a_1,b_1,c_1,a_2,c_2,c_3 \in F_2 \wedge a \neq b \wedge a,b <_2 f_{1,2}(\gamma) =: \gamma_2 \wedge \neg coll_2(a_1,b_1,c_1) \wedge K_2(a,b/a_1,b_1) \wedge a_2 \nless_2 \gamma_2$

9) $\exists F_3 \in \mathfrak{A} (F_2 \sqsubset F_3 \wedge \exists! b_3 \in F_3(b_3 <_3 H_{3,f_{2,3}(\gamma_2),a_2} \wedge K_3(a,b_3/a_1,c_1) \wedge K_3(b,b_3/b_1,c_1)$ aus 8) mit D16

10) $\forall a_3 \in F_3(a_3 <_3 H_{3,f_{2,3}(\gamma_2),a_2} \wedge K_3(a,a_3/a_1,c_1) \wedge K_3(b,a_3/b_1,c_1) \to a_3 = b_3)$ aus 9)

Wir setzen $a_3 := c$ in 10)

11) $c <_1 H_{1,\gamma,a_2} \to c <_3 H_{3,f_{2,3}(\gamma_2),a_2}$ Lemma 15

12) $K_1(a,c/,a_1,c_1) \wedge K_1(b,c/,b_1,c_1) \to K_3(a,c/a_1,c_1) \wedge K_3(b,c/b_1,c_1)$ Lemma 1

13) $c = b_3$ aus 10)-12) Wir setzen $a_3 := c_2$ in 10)

14) $Z_2(c_2,c_3,a_2) \to Z_3(c_2,c_3,a_2)$

15) $c_2,a_2 \nless_3 \gamma_3 \wedge c_3 <_3 \gamma_3$ aus 6) und 7)

16) $c_2,a_2 \nless_3 \gamma_3 \wedge \exists c_3 <_3 \gamma_3(Z_3(c_2,c_3,a_2))$, d.h. $Z_3(c_2,\gamma_3,a_2)$

17) $c_2 <_3 H_{3,\gamma_3,a_2}$ aus 16)

18) $K_3(a,c_2/a_1,c_1) \wedge K_3(b,c_2/b_1,c_1)$ aus 5) mit Lemma 13

19) $c_2=b_3$ aus 10),17) und 18)

20) $c_2=c$,d.h. c ist in P_α eindeutig bestimmt.

Damit sind alle Axiome außer dem Stetigkeits- und dem Parallelenaxiom bewiesen. Zum Beweis des Stetigkeitsaxioms brauchen wir noch einige Hilfssätze. Wir können hierbei auf Theoreme von (3) zurückgreifen, in welchen diese beiden Axiome nicht benutzt werden.

Lemma 16 $\forall a,b \in P_\alpha \, (a \neq b \rightarrow \exists! c \in P_\alpha \, (K_\alpha(a,c/c,b) \wedge \mathrm{coll}_{\Gamma_\alpha}(a,b,c)))$

Beweis: (3),S.95,Theorem 32.

Lemma 17 $\forall a,b,c,a' \in P_\alpha \, (\exists \alpha \in G_\alpha (a,b,c,a' \in_\alpha \alpha) \wedge Z_\alpha(a,a',b) \wedge Z_\alpha(a,a',c) \wedge b \neq a \rightarrow$ (entweder $Z_\alpha(a,a',b)$ oder $Z_\alpha(b,a',c)$))

Beweis: (3),S.27,Theorem 18.

Lemma 18 $\forall a,b,c,a' \in P_\alpha \, (Z_\alpha(a,b,a') \wedge Z_\alpha(b,c,a') \rightarrow Z_\alpha(a,c,a'))$

Beweis: (3),S.27,Theorem 17.

Lemma 19 $a,a_1 \in \delta_{\Gamma_\alpha,b,c} \rightarrow a \in \delta_{\Gamma_\alpha,b,a_1}$

Beweis: Wir können $a \neq a_1$ annehmen. Ist $a=c$, so folgt $Z_\alpha(a,a_1,a) \vee Z_\alpha(b,a,a_1)$ und damit die Behauptung. Es sei also $a \neq c$. Ebenso können wir $a_1 \neq c$ annehmen, denn aus $Z_\alpha(b,a,c) \wedge a_1=c$ und auch aus $Z_\alpha(b,c,a) \wedge a_1= c$ folgt die Behauptung.

1) $Z_\alpha(b,a,c) \wedge Z_\alpha(b,a_1,c) \rightarrow$ (entweder $Z_\alpha(a,a_1,a)$ oder $Z_\alpha(a,a_1,c)$) Lemma 17

2) $Z_{\mathfrak{A}}(b,a_1,a) \to$ Behauptung
3) $Z_{\mathfrak{A}}(b,a,c) \wedge Z_{\mathfrak{A}}(a,a_1,c) \to Z_{\mathfrak{A}}(b,a,a_1)$ D13 und T2-a.
4) $Z_{\mathfrak{A}}(b,a,c) \wedge Z_{\mathfrak{A}}(b,c,a_1) \to Z_{\mathfrak{A}}(b,a,a_1)$ Lemma 18
5) $Z_{\mathfrak{A}}(b,c,a) \wedge Z_{\mathfrak{A}}(b,a_1,c) \to Z_{\mathfrak{A}}(b,a_1,a)$ Lemma 18
6) $Z_{\mathfrak{A}}(b,c,a) \wedge Z_{\mathfrak{A}}(b,c,a_1) \to$ Behauptung wie früher

<u>Lemma 20</u> $Z_{\mathfrak{A}}(a,b,c) \wedge Z_{\mathfrak{A}}(a,b,a_1) \to Z_{\mathfrak{A}}(b,c,a_1) \vee Z_{\mathfrak{A}}(b,a_1,c)$ falls $c \neq a_1$

Beweis: Man benutzt D13 und T2-a,b.
Wir kommen nun zu

<u>D22-28</u> $\forall X,Y(X \subseteq P_{\mathfrak{A}} \wedge Y \subseteq P_{\mathfrak{A}} \wedge Y \neq \emptyset \neq Y \wedge \exists a \in P_{\mathfrak{A}}$
$\forall b,c \in P_{\mathfrak{A}} (b \in X \wedge c \in Y \to Z_{\mathfrak{A}}(a,b,c)) \to \exists a_1 \in P_{\mathfrak{A}}$
$\forall b_1,b_2 \in P_{\mathfrak{A}} (b_1 \in X \setminus \{a_1\} \wedge b_2 \in Y \setminus \{a_1\} \to$
$Z_{\mathfrak{A}}(b_1,a_1,b_2)))$

Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle.
<u>Erster Fall</u>: Es gibt eine reelle Zahl $r > 0$, sodaß $d_{\mathfrak{A}}(a_1,a_2) > r$ für alle $a_1 \in X, a_2 \in Y$. Hierbei bezeichnet $d_{\mathfrak{A}}$ die durch die Metriken d_F, $F \in \mathfrak{A}$ auf $P_{\mathfrak{A}}$ induzierte Metrik, d.h. $d_{\mathfrak{A}}(a,b)=s$ gdw es eine Figur $F \in \mathfrak{A}$ gibt mit $a,b \in F$ und $d_F(a,b)=s$. Wegen der Verträglichkeit von $\mathfrak{A}$ ist $d_{\mathfrak{A}}$ wohldefiniert.
(1) Wir wählen Punkte $a_1 \in X, a_2 \in Y$. Dann ist $a_1 \neq a_2$. Es sei $\alpha_{1,2} \in G_{\mathfrak{A}}$ die durch a_1,a_2 eindeutig bestimmte Gerade mit $a_1,a_2 \in_{\mathfrak{A}} \alpha_{1,2}$.
(2) Es gibt eine reelle Zahl s, sodaß
$\forall a_3 \in X(d_{\mathfrak{A}}(a_1,a_3) \leq s)$
denn: $a_3 \in X \to Z_{\mathfrak{A}}(a,a_3,a_2) \to \exists F \in \mathfrak{A}(Z_F(a,a_3,a_2))$
$\to d_F(a,a_3)+d_F(a_3,a_2)=d_F(a,a_2)=:s$. Analog erhält

man $d_\alpha(a,a_1)+d_\alpha(a_1,a_2)=d_\alpha(a,a_2)$. Da d_α eine Metrik ist, gilt $d_\alpha(a_1,a_3) \leqslant d_\alpha(a,a_1)+d_\alpha(a,a_3) \wedge d_\alpha(a_1,a_3) \leqslant d_\alpha(a_1,a_2)+d_\alpha(a_3,a_2)$, also insgesamt $2d_\alpha(a_1,a_3) \leqslant 2d_\alpha(a,a_2)$, d.h. $d_\alpha(a_1,a_3) \leqslant s$.

(3) $\forall a,b \in P_\alpha\ (a \neq b \rightarrow \exists! c \in P_\alpha\ (K_\alpha(a,c/c,b) \wedge \mathrm{coll}_{\Gamma_\alpha}(a,b,c)))$ dies ist Lemma 16

(4) Wir wenden (3) auf a_1 und a_2 an und erhalten nach endlich vielen Schritten $a_4 \lessdot_\alpha \alpha_{1,2}$ mit $d_\alpha(a_1,a_4) < r$. Anschaulich gesprochen heißt dies: Wir haben die Strecke a_1a_2 endlich oft in Richtung auf a_1 halbiert.

(5) Wir betrachten nun die Halbgerade mit Ursprung a_1 durch a_2. Nach D22-25, welche bereits als erfüllt nachgewiesen ist, gibt es auf dieser Geraden genau einen Punkt b_2 mit $K_\alpha(a_1,b_2/a_1,a_4)$. Anschaulich: Wir tragen die Strecke a_1a_4 auf der Halbgeraden an a_1 in Richtung a_2 an. Wieder nach D22-25 gibt es auf der Halbgeraden mit Ursprung b_2 durch a_2 genau ein b_3 mit $K_\alpha(b_2,b_3/a_1,a_4)$, d.h. wir tragen die Strecke a_1a_2 nun an b_2 an. Dieses Verfahren können wir fortsetzen, bis wir nach n Schritten $(n \geqslant 1)$ ein b_{n+1} finden mit $b_{n+1} \notin X$. Denn es gibt ein n, sodaß $d_\alpha(a_1,a_4)n > s$. Da aber die b_i alle auf $\alpha_{1,2}$ liegen, ist $nd_\alpha(a_1,a_4)=d_\alpha(a_1,b_{n+1})$, wie man durch Induktion nachprüft, also $d_\alpha(a_1,b_{n+1}) > s$. Wegen (2) kann dann b_{n+1} nicht in X liegen.

(6) Es gibt ein kleinstes n mit $b_{n+1} \in X$, also mit $b_n \in X$. Dann kann aber b_{n+1} nicht in Y liegen,

denn sonst wäre $d_{\alpha}(b_n,b_{n+1}) > r$ gemäß unserer Fallunterscheidung. Nach Konstruktion ist aber $d_{\alpha}(b_n,b_{n+1})=d_{\alpha}(a_1,a_4) < r$ nach (4).

(7) $\forall c_1 \in X \, \forall c_2 \in Y (Z_{\alpha}(c_1,b_{n+1},c_2))$

Beweis: Seien c_1,c_2 gegeben. Aus den Voraussetzungen folgt: $Z_{\alpha}(a,a_1,a_2) \wedge Z_{\alpha}(a,c_1,a_2) \wedge Z_{\alpha}(a,c_1,c_2)$. Hieraus:

7.1 $a \leqslant_{\alpha} \alpha_{1,2} \wedge c_1 \leqslant_{\alpha} \alpha_{1,2} \wedge c_2 \leqslant_{\alpha} \alpha_{1,2}$

Wir haben also

7.2 $a,a_1,a_2,c_1,c_2,b_n,b_{n+1} \leqslant_{\alpha} \alpha_{1,2} \wedge b_n \neq b_{n+1} \neq c_2 \neq b_n \wedge c_1 \neq b_{n+1}$

7.3 $Z_{\alpha}(b_n,b_{n+1},c_2) \vee Z_{\alpha}(b_{n+1},b_n,c_2) \vee Z_{\alpha}(b_n,c_2,b_{n+1})$ nach 7.2 und D13

7.4 $b_{n+1} \leqslant_{\alpha} H_{\Gamma_{\alpha},b_n,a_2}$ nach Konstruktion

7.5 $Z_{\alpha}(a,b_n,a_2) \wedge Z_{\alpha}(a,b_n,c_2)$

7.6 $Z_{\alpha}(b_n,a_2,c_2) \vee Z_{\alpha}(b_n,c_2,a_2)$ aus 7.5 mit Lemma 20

7.7 $c_2 \leqslant_{\alpha} H_{\Gamma_{\alpha},b_n,a_2}$

7.8 $b_{n+1} \leqslant_{\alpha} H_{\Gamma_{\alpha},b_n,c_2}$ aus 7.4-7.7

7.9 $Z_{\alpha}(b_n,b_{n+1},c_2) \vee Z_{\alpha}(b_n,c_2,b_{n+1})$ aus 7.8

7.1o $Z_{\alpha}(b_n,c_2,b_{n+1}) \rightarrow r < d_{\alpha}(b_n,c_2)+d_{\alpha}(c_2,b_{n+1}) = d_{\alpha}(b_n,b_{n+1}) < r$. Dies ist ein Widerspruch, also kann in 7.9 das zweite Konjunktionsglied nicht gelten daher

7.11 $Z_{\alpha}(b_n,b_{n+1},c_2)$

7.12 $Z_{\alpha}(a,b_n,c_2) \wedge Z_{\alpha}(a,b_n,b_{n+1})$ nach 7.1o und 7.11

7.13 $Z_{\alpha}(b_n,b_{n+1},c_1) \rightarrow Z_{\alpha}(a_1,b_{n+1},c_1)$ nach 7.12 und D13

7.14 $Z_{\alpha}(b_n, b_{n+1}, c_1) \rightarrow s < d_{\alpha}(a_1, b_{n+1}) <$
$d_{\alpha}(a_1, c_1) \leqslant s$

7.15 $\neg Z_{\alpha}(b_n, b_{n+1}, c_1)$ aus 7.14

7.16 $c_1 = b_n \rightarrow Z_{\alpha}(c_1, b_{n+1}, c_2)$ nach 7.11

7.17 $b_1 \neq b_n \rightarrow Z_{\alpha}(c_1, b_n, b_{n+1}) \vee Z_{\alpha}(b_n, c_1, b_{n+1}) \vee$
$Z_{\alpha}(b_n, b_{n+1}, c_1)$ nach 7.2

7.18 $Z_{\alpha}(c_1, b_n, b_{n+1}) \rightarrow Z_{\alpha}(c_1, b_{n+1}, c_2)$
aus 7.11 mit D13 und T2

7.19 $Z_{\alpha}(b_n, c_1, b_{n+1}) \rightarrow Z_{\alpha}(c_1, b_{n+1}, c_2)$ wie 7.18

7.2o $Z_{\alpha}(c_1, b_{n+1}, c_2)$ aus 7.16-7.19

Damit ist D22-28 im ersten Fall bewiesen,denn
$\exists b_{n+1} \in P_{\alpha} \forall c_1, c_2 \in P_{\alpha}(c_1 \in X \setminus \{b_{n+1}\} \wedge c_2 \in Y \setminus \{b_{n+1}\}$
$\rightarrow Z_{\alpha}(c_1, b_{n+1}, c_2))$

Zweiter Fall: Es gibt keine reelle Zahl $r > 0$ mit $d_{\alpha}(a,b) > r$ für alle $a \in X, b \in Y$.Wir betrachten zwei Unterfälle.

2.1) $\exists b \in X \cup Y \forall c_1, c_2(c_1 \in X \setminus \{b\} \wedge c_2 \in Y \setminus \{b\} \rightarrow$
$Z_{\alpha}(c_1, b, c_2))$

In diesem Fall ist D22-28 erfüllt.

2.2) $\exists b \in X \cup Y \forall c_1, c_1(c_1 \in X \setminus \{b\} \wedge c_2 \in Y \setminus \{b\} \wedge$
$\neg Z_{\alpha}(c_1, b, c_2))$

Wir behaupten nun

(1) Es gibt Folgen $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ mit $a_n \in X, b_n \in Y$ und
$\forall n(d_{\alpha}(a_n, b_n) < n^{-1})$,sodaß alle a_n und b_n
untereinander verschieden sind.

Gemäß Fall 2 gibt es Folgen $\langle a_n^* \rangle, \langle b^*_n \rangle$ mit
$d_{\alpha}(a_n^*, b_n^*) < n^{-1}$ und $a_n^* \in X, b_n^* \in Y$.Wir definieren nun die Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ induktiv.

$a_1 := a_1^*$, $b_1 := b_1^*$.

Es seien $a_1,..,a_n$ und $b_1,..,b_n$ bereits definiert mit den Eigenschaften

$a_i \in X, b_i \in Y, d_{\mathfrak{A}}(a_i,b_i) < i^{-1}$ für $i \leq n$ und alle

a_i bzw. b_i sind untereinander verschieden.

Wir betrachten vier Unterfälle.

<u>2.2.1)</u> $a^*_{n+1} \neq a_i$ und $b^*_{n+1} \neq b_i$ für alle $i \leq n$. Dann

setzen wir $a_{n+1} := a^*_{n+1}$ und $b_{n+1} := b^*_{n+1}$.

Offenbar erfüllen dann die Folgen

$\langle a_i \rangle_{i \leq n+1}$ und $\langle b_i \rangle_{i \leq n+1}$ die Aussage (1).

<u>2.2.2)</u> Es gelte

$$\exists i \leq n(a^*_{n+1} = a_i) \wedge \forall j \leq n(b^*_{n+1} \neq b_j).$$

Wir setzen $b_{n+1} := b^*_{n+1}$

Es gibt a_k $(k \leq n)$, sodaß

(2) $d_{\mathfrak{A}}(a_k, b^*_{n+1}) < d_{\mathfrak{A}}(a_j, b^*_{n+1})$ für alle $j \neq k, j \leq n$.

Zu a_k gibt es nach 2.2) ein $c_1 \in X \setminus \{a_k\}$ und ein $c_2 \in Y \setminus \{a_k\}$, mit

(3) $\neg Z_{\mathfrak{A}}(c_1, a_k, c_2)$

Aus $Z_{\mathfrak{A}}(a,c_1,c_2) \wedge Z_{\mathfrak{A}}(a,a_k,c_2)$ folgt nach Lemma 17

(entweder $Z_{\mathfrak{A}}(a,c_1,a_k)$ oder $Z_{\mathfrak{A}}(a_k,c_1,c_2)$). Aus

$Z_{\mathfrak{A}}(a,c_1,a_k)$ folgt aber mit $Z_{\mathfrak{A}}(a,a_k,c_2)$:

$Z_{\mathfrak{A}}(c_1,a_k,c_2)$ im Widerspruch zu (3). Also gilt

(4) $Z_{\mathfrak{A}}(a_k,c_1,c_2)$

Wir setzen $a_{n+1} := c_1$

(5) $a_{n+1} \neq a_j$ für $j \leq n$.

Dies beweist man indirekt mit Hilfe von (2) und (4), sowie Lemma 17.

(6) $Z_{\alpha}(a_k,c_1,b^*_{n+1})$ Man benutzt (4) und Lemma 20 und unterscheidet die Fälle $c_2=b^*_{n+1}$ und $c_2\neq b^*_{n+1}$.

(7) $Z_{\alpha}(a^*_{n+1},a_{n+1},b^*_{n+1})$ Dies folgt aus (6) mit (2), wenn man beachtet, daß Fall 2.2.2 vorliegt. Aus (7) folgt aber, daß $d_{\alpha}(a_{n+1},b_{n+1})=$ $d_{\alpha}(a_{n+1},b^*_{n+1}) < d_{\alpha}(a^*_{n+1},b^*_{n+1}) < (n+1)^{-1}$, also ist (1) für $\langle a_i\rangle_{i\leq n+1}$ und $\langle b_i\rangle_{i\leq n+1}$ bewiesen.

<u>2.2.3)</u> $\forall i\leq n(a^*_{n+1}\neq a_i) \wedge \exists j\leq n(b^*_{n+1}=b_j)$

Wir setzen $a_{n+1}:= a^*_{n+1}$

Es gibt b_k $(k\leq n)$, sodaß

(8) $d_{\alpha}(b_k,a^*_{n+1}) < d_{\alpha}(b_j,a^*_{n+1})$ für $j\neq k, j\leq n$.

Zu b_k gibt es nach 2.2) ein $c_1\in X\setminus\{b_k\}$ und ein $c_2\in Y\setminus\{b_k\}$, sodaß

(9) $\neg Z_{\alpha}(c_1,b_k,c_2)$

Aus $Z_{\alpha}(a,c_1,b_k)\wedge Z_{\alpha}(a,c_1,c_2)\wedge b_k\neq c_2$ folgt nach Lemma 20: $Z_{\alpha}(c_1,c_2,b_k)\vee Z_{\alpha}(c_1,b_k,c_2)$ und hieraus mit (9)

(10) $Z_{\alpha}(c_1,c_2,b_k)$. Wir setzen $b_{n+1}:=c_2$

(11) $b_{n+1}\neq b_j$ für $j\leq n$

Aus der Annahme des Gegenteils folgt nämlich mit (8): $\neg Z_{\alpha}(a,b_j,b_k)$ und hieraus mit Lemma 20: $Z_{\alpha}(c_1,b_k,b_j)$. Aus diesem ergibt sich mit $b_j\neq c_2=$ b_{n+1} ein Widerspruch.

(12) $Z_{\alpha}(a^*_{n+1},b_{n+1},b^*_{n+1})$

Dies beweist man so: Aus (10) und Lemma 20 folgt

(13) $Z_{\alpha}(a^*_{n+1},c_2,b_k) \vee Z_{\alpha}(a^*_{n+1},b_k,c_2)$

Aus $Z_{\alpha}(a^*_{n+1},b_k,c_2)$ erhält man aber mit $Z_{\alpha}(a,a^*_{n+1},b_k)$ einen Widerspruch zu (1o),also gilt

(14) $Z_{\alpha}(a^*_{n+1},c_2,b_k)$

Aus (14) und (8) folgt nun (12) durch Fallunter=scheidung nach $b_k \neq b^*_{n+1}$ oder $b_k = b^*_{n+1}$,wenn man 2.2.3) beachtet.Aus (12) folgt aber $d_{\alpha}(a_{n+1},b_{n+1}) = d_{\alpha}(a^*_{n+1},b_{n+1}) < d_{\alpha}(a^*_{n+1},b^*_{n+1}) < (n+1)^{-1}$.Also haben $\langle a_i \rangle_{i \leq n+1}$ und $\langle b_i \rangle_{i \leq n+1}$ die Eigenschaften von (1).

<u>2.2.4)</u> $\exists i \leq n(a_i = a^*_{n+1}) \wedge \exists j \leq n(b_j = b^*_{n+1})$

Wie in den bisherigen Fällen findet man a_k mit

(15) $d_{\alpha}(a_k,b_j) < d_{\alpha}(a_i,b_j)$ für $i \leq n, i \neq k$ und b_m mit

(16) $d_{\alpha}(b_m,a_k) < d_{\alpha}(b_i,a_k)$ für $i \leq n, i \neq m$.

Dann gilt

(17) $Z_{\alpha}(a_i,a_k,b_j)$ für $i \leq n, i \neq k, j \leq n$ und

(18) $Z_{\alpha}(a_j,b_m,b_i)$ für $i \leq n, i \neq m, j \leq n$.

Man findet zu a_k ein $c_1 \in X \setminus \{a_k\}$ und ein $c_2 \in Y \setminus \{a_k\}$ mit $\neg Z_{\alpha}(c_1,a_k,c_2)$ und zu b_m ein $c'_1 \in X \setminus \{b_m\}$ und ein $c'_2 \in Y \setminus \{b_m\}$ mit $\neg Z_{\alpha}(c'_1,b_m,c'_2)$.

Wie in 2.2.2) und 2.2.3) zeigt man,daß $Z_{\alpha}(a_k,c_1,c_2)$ und $Z_{\alpha}(c'_1,c'_2,b_m)$.Hieraus folgt

(19) $Z_{\alpha}(a_k,c_1,b_m) \wedge Z_{\alpha}(a_k,c'_2,b_m)$

Setzt man $a_{n+1} := c_1$ und $b_{n+1} := c'_2$,

so ist a_{n+1} verschieden von allen a_i und b_{n+1}

verschieden von allen b_i mit $i \leq n$.Aus (19) folgt

(2o) $Z_{\mathfrak{a}}(a^*_{n+1}, a_{n+1}, b^*_{n+1}) \wedge Z_{\mathfrak{a}}(a^*_{n+1}, b_{n+1}, b^*_{n+1})$

und hieraus $d_{\mathfrak{a}}(a_{n+1}, b_{n+1}) < d_{\mathfrak{a}}(a^*_{n+1}, b^*_{n+1}) < (n+1)^{-1}$.Damit ist (1) bewiesen.

Es seien nun $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ die gemäß (1) konstruierten Folgen.Wir definieren induktiv Folgen $\langle F_i \rangle, \langle U_i \rangle, \langle V_i \rangle$,die die Voraussetzungen von D16-8 erfüllen.

(21) Wegen der Verträglichkeit von $\mathfrak{a}$ gibt es $F_1 \in \mathfrak{a}$ mit $a_1, b_1, a \in F_1$,wobei $a_1 \in X, b_1 \in Y$ die ersten Glieder von $\langle a_n \rangle$ bzw.$\langle b_n \rangle$ sind und a der Punkt aus der Voraussetzung von D16-8.

Wir setzen $U_1 := \{a_1\}, V_1 := \{b_1\}$,dann gilt $F_1 \in \mathfrak{a}$, $U_1 \subseteq P_1, V_1 \subseteq P_1$.Seien nun F_n, U_n, V_n mit den fraglichen Eigenschaften bereits definiert.Nach (1) gibt es $a_{n+1} \in X, b_{n+1} \in Y$ (verschieden von allen a_i bzw. $b_i, i \leq n$) mit $d_{\mathfrak{a}}(a_{n+1}, b_{n+1}) < (n+1)^{-1}$.
Nach D17 gibt es $F \in \mathfrak{a}$ mit $a_{n+1}, b_{n+1} \in F$ und es gibt $F_{n+1} \in \mathfrak{a}$ mit $F, F_n \sqsubset F_{n+1}$.Wir setzen:
$U_{n+1} := U_n \cup \{a_{n+1}\}, V_{n+1} := V_n \cup \{b_{n+1}\}$ und erhalten

(22) $F_{n+1} \in \mathfrak{a}, U_{n+1} \subseteq P_{n+1}, V_{n+1} \subseteq P_{n+1}, F_n \sqsubset F_{n+1}$,
$U_n \subseteq U_{n+1}$ und $V_n \subseteq V_{n+1}$.

Die so definierten Folgen erfüllen also D16-8.1 bis 8.4.

(23) Sei $i \in \mathbb{N}$, $b \in U_i, c \in V_i$.Nach Konstruktion der U_i und V_i gilt $b \in X$ und $c \in Y$,also nach der Voraussetzung von D16-8: $Z_{\mathfrak{a}}(a,b,c)$ und somit nach Lemma 1: $Z_i(a,b,c)$.Aus D16-8 folgt nun

(24) $\exists F\in\mathfrak{A}(F_1\sqsubset F \wedge \exists b\in F\,\forall j\in\mathbb{N}\;\forall c_1\in U_j\setminus\{b\}$
$\forall c_2\in V_j\setminus\{b\}\,\exists F_j\in\mathfrak{A}\;(F\sqsubset F_j\wedge c_1,c_2\in F_j\wedge$
$Z_j(c_1,b,c_2)))$

Insbesondere ist also $b\in P_{\mathfrak{A}}$ .Wir zeigen nun

(25) $\forall c_1,c_2\in P_{\mathfrak{A}}\;(c_1\in X\setminus\{b\}\wedge c_2\in Y\setminus\{b\}\rightarrow Z_{\mathfrak{A}}(c_1,b,c_2))$

Dazu seien c_1,c_2 gegeben.Nach der Voraussetzung von D16-8 gilt $Z_{\mathfrak{A}}(a,c_1,c_2)$,also $c_1\neq c_2$.Nach 2.2) gibt es zu c_1 Punkte $c_1'\in X\setminus\{c_1\}$ und $c_2'\in Y\setminus\{c_2\}$ mit $\neg Z_{\mathfrak{A}}(c_1',c_1,c_2')$ und zu c_2 Punkte $c_1''\in X\setminus\{c_2\}$ und $c_2''\in Y\setminus\{c_2\}$ mit $\neg Z_{\mathfrak{A}}(c_1'',c_2,c_2'')$.Man beweist $Z_{\mathfrak{A}}(c_1,c_1',c_2')$ und $Z_{\mathfrak{A}}(c_1'',c_2'',c_2)$.Zu $\min\{d_{\mathfrak{A}}(c_1,c_1'),d_{\mathfrak{A}}(c_2,c_2'')\}=:m$ finden wir ein $n\in\mathbb{N}$ mit $n^{-1}<m$.Nach (1) können wir annehmen,daß b verschieden ist von a_n,b_n,c_1,c_1',c_2 und c_2''. Weiter ist $d_{\mathfrak{A}}(a_n,b_n)<n^{-1}$.Aus Lemma 20 beweisen wir

(26) $Z_{\mathfrak{A}}(c_1,b_n,c_2)\wedge Z_{\mathfrak{A}}(c_1,a_n,c_2)$

Nach Konstruktion sind $a_n\in U_n\setminus\{b\}$und $b_n\in V_n\setminus\{b\}$. Daher gibt es nach (24) eine Figur $F_n\in\mathfrak{A}$ mit $F\sqsubset F_n\wedge a_n,b_n\in F_n\wedge Z_n(a_n,b,b_n)$,also insbesondere

(27) $Z_{\mathfrak{A}}(a_n,b,b_n)$

Aus (26) folgt mit Lemma 17

(28) Entweder $Z_{\mathfrak{A}}(c_1,a_n,b_n)$ oder $Z_{\mathfrak{A}}(b_n,a_n,c_2)$

Aus (27) und (28) folgt aber

(29) $Z_{\mathfrak{A}}(c_1,b,c_2)$.

Damit ist (25) und folglich D22-28 bewiesen.
Nicht so schwierig ist der Beweis von

<u>D22-29</u> $\forall A \in E_{\mathfrak{A}}\ \forall \alpha \in G_{\mathfrak{A}}\ \forall a \in P_{\mathfrak{A}} (\alpha \sqsubseteq A \wedge a <_{\mathfrak{A}} A \wedge$
$a \not<_{\mathfrak{A}} \alpha \rightarrow \forall \beta, \gamma \in G_{\mathfrak{A}} (\beta, \gamma \sqsubseteq A \wedge a <_{\mathfrak{A}} \beta \sqcap \gamma \wedge \neg$
$\exists b (b <_{\mathfrak{A}} \alpha \sqcap \beta) \wedge \neg \exists c (c <_{\mathfrak{A}} \alpha \sqcap \gamma) \rightarrow \beta = \gamma))$

Beweis: Seien $A, \alpha, a, \beta, \gamma$ gegeben mit $\alpha \sqsubseteq A \wedge a <_{\mathfrak{A}} A$, $a \not<_{\mathfrak{A}} \alpha, \beta, \gamma \sqsubseteq A, a <_{\mathfrak{A}} \beta \sqcap \gamma$ und $\neg \exists b (b <_{\mathfrak{A}} \alpha \sqcap \beta)$ und $\neg \exists c (c <_{\mathfrak{A}} \alpha \sqcap \gamma)$. Wir nehmen an, es sei $\beta \neq \gamma$. Nach D17 gibt es $F_1 \in \mathfrak{A}$ mit

1) $\exists \alpha_1 \in F_1 (\alpha = (\widetilde{\alpha_1})_{F_1})$
2) $a \in F_1 \wedge a \not<_1 \alpha_1$
3) $\exists \beta_1, \gamma_1 \in F_1 (\beta = (\widetilde{\beta_1})_{F_1} \wedge \gamma = (\widetilde{\gamma_1})_{F_1} \wedge$
$a <_1 \beta_1 \sqcap \gamma_1 \wedge \beta_1 \neq \gamma_1)$ nach Lemma 5

Aus D16 folgt daher, daß
$\exists F_2 \in \mathfrak{A}\ (F_1 \sqsubset F_2 \wedge \exists c \in F_2 (c <_2 \alpha_1 \sqcap f_{1,2}(\beta_1))) \vee$
$\exists F_3 \in \mathfrak{A}\ (F_1 \sqsubset F_3 \wedge \exists c' \in F_3 (c' <_3 \alpha_1 \sqcap f_{1,3}(\gamma_1)))$.

Aus dem ersten Adjunktionsglied folgt, daß $c <_{\mathfrak{A}} \alpha \sqcap \beta$, aus dem Zweiten, daß $c' <_{\mathfrak{A}} \alpha \sqcap \gamma$, womit die Annahme zum Widerspruch geführt ist.

Mit Hilfe von D23 können wir nun die Adäquatheit der Theorien T_1 und T_2 präzise behaupten und diese Behauptungen mittels T6 auch beweisen.

<u>T7</u> Jedes Element X von $A(K_1)$ ist einbettbar in eine Geometrie Γ.

Beweis: Jedes Element von $A(K_1)$ läßt sich zu einer abgeschlossenen, verträglichen Figurenmenge $\mathfrak{A}$ erweitern. Dann ist nach T6 $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ eine Geometrie. Man prüft leicht nach, daß X einbettbar in $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ gemäß D23 ist.

T7 besagt, daß die Strukturen, die möglicherweise erfolgreiche Anwendungen der Theorie sind, (nämlich die Elemente von $A(K_1)$), alle Teilstrukturen von Geometrien sind, d.h. daß die Objekte und Relationen in Elementen von $A(K_1)$ "wie in einer Geometrie" sind. Es kann also nicht vorkommen, daß $X \in A(K_1)$ Objekte enthält, die nicht auch in einer Geometrie auftreten können. In diesem Sinn verstehen wir die Aussage, daß T_1 adäquat sei.

<u>T8</u> Jedes Element $X \in A(K_2)$ ist einbettbar in eine Geometrie Γ .

Beweis: Aus $X \in A(K_2)$ folgt, daß sich X zu einer Figurenmenge ergänzen läßt, welche Teilmenge einer abgeschlossenen und verträglichen Figurenmenge $\mathfrak{A}$ ist. Nach T6 ist $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ eine Geometrie und X ist einbettbar in $\Gamma_{\mathfrak{A}}$.

Komplizierter liegen die Verhältnisse mit T_3. Wir stellen zunächst fest.

<u>T9</u> Es gibt Elemente $X \in A(K_3)$, welche nicht in eine Geometrie einbettbar sind.

Beweis: Es sei X eine verträgliche Figurenmenge, $X=\{F_i / i \in J\}$, sodaß $|\bigcup\{P_i / i \in J\}| > |\mathbb{R}|$ ist. Hier steht $|x|$ für die Mächtigkeit der Menge x. Wir nehmen an, X sei einbettbar in eine Geometrie mit Punktmenge P. Dann gilt nach D23 $\bigcup\{P_i / i \in J\} \subseteq P$. Der dreidimensionale reelle Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist eine Geometrie mit $|\mathbb{R}^3| = |\mathbb{R}|$. Nach (3), S.276 ff sind je zwei Geometrien gleichmächtig, also $|P| = |\mathbb{R}|$. Es folgt $|\mathbb{R}| <$

$|\bigcup\{P_i/i\in J\}| < |P| = |\mathbb{R}|$,ein Widerspruch.

Philosophisch ist dieser Beweis wenig über=zeugend.Wie soll eine verträgliche Figuren=menge der benötigten Mächtigkeit existieren? Wenn wir dies Mächtigkeitsargument jedoch nicht akzeptieren,wird die Sache noch ver=trackter.Betrachten wir zunächst eine einzige Figur.Diese ist sicher einbettbar in eine Geometrie,was man folgendermaßen einsieht. Man stelle sich die Figur im $\mathbb{R}^3$ vor und ordne jedem (eventuell ausgedehnten) Punkt a der Figur einen ausgezeichneten Punkt des $\mathbb{R}^3$ aus dem Raumgebiet,das der Punkt a einnimmt,zu. Analoges mache man für Geraden und Ebenen.Dann nimmt man aus der Menge der Punkte,Geraden und Ebenen des $\mathbb{R}^3$ die eben ausgezeichneten end=lich vielen Punkte,Geraden und Ebenen heraus und ersetzt sie durch die entsprechenden Punkte, Geraden und Ebenen der Figur.Die Relationen für diese neuen Objekte mit den Elementen von $\mathbb{R}^3$ werden <u>definiert</u> durch die vor der Er=setzung statthabenden Relationen.So hat man die Figur in $\mathbb{R}^3$,also in eine Geometrie,eingebettet.

Diesen merkwürdigen Gedankengang kann man nur deshalb einen Beweis nennen,weil die Objekte des $\mathbb{R}^3$ zu unserer realen Welt in einer bisher ungeklärten Beziehung stehen und man zwischen ihnen ziemlich abwegige Relationen definieren kann.Ebenso wie für eine einzelne Figur funktioniert die skizzierte Überlegung auch für endliche Figurenmengen.Erst für unendliche Figurenmengen erhalten wir T9,wobei der noch nicht untersuchte Fall abzählbar unendlich vieler Figuren von besonderem Interesse ist.

V EMPIRISCHE BEHAUPTUNGEN, MEßMETHODEN UND THEORETIZITÄT

Wir wollen nun versuchen, die in D20 definierten Theorien miteinander zu vergleichen. Als Vergleichskriterien benützen wir die empirischen Behauptungen, sowie Analysen von Standard-Meßmethoden der Längenmessung und Analysen der Theoretizität in den drei zur Diskussion stehenden Fällen. In einem ersten Schritt stellen wir einiges Material zusammen, das dann im zweiten Schritt zum Vergleich und zu einer Bewertung benutzt wird.

i) Die empirischen Behauptungen

Die mit Theorie T_1 formulierte empirische Behauptung $I_G \in A(K_1)$ besagt intuitiv, daß sich die partiellen möglichen Figuren von I_G durch Hinzufügung von Abstandsfunktionen so erweitern lassen, daß die entstehende Figurenmenge abgeschlossen und verträglich ist. Der wesentliche Punkt dabei ist, daß alle Figuren simultan betrachtet werden. Hierauf beruhen die beiden nächsten Folgerungen, zu deren Formulierung wir noch eine Definition brauchen.

<u>D25</u> Für eine Menge X partieller möglicher Figuren sei $\Delta_X := [P_X, G_X, E_X, <_X, Z_X, K_X]$ wie Γ_X in D24 definiert, wobei Bedingung D15-4 bei $F \sqsubseteq F'$ wegzulassen ist.

<u>T10</u> a) Aus $I_G \in A(K_1)$ folgt, daß Δ_{I_G} eine Geometrie ist

b) P_{I_G} enthält (überabzählbar) unendlich viele Punkte, falls $I_G \in A(K_1)$

c) I_G ist (überabzählbar) unendlich für $I_G \in A(K_1)$

T10 ist eine einfache Folgerung aus T6.Nach T10-b muß,falls die empirische Behauptung richtig ist,die Menge der intendierten Anwend=ungen unendlich viele verschiedene Punkte ent=halten.Gegen abzählbar unendlich viele Punkte wäre nichts einzuwenden,man könnte P_{I_G} dann als potentiell unendliche Gesamtheit auffassen. Wie aber sollen wir die Existenz von überab=zählbar vielen Punkten deuten? Noch dringlicher ist diese Frage für I_G (T10-c) zu stellen.

Zu T10-a möchte man zunächst sagen,daß die Objekte der partiellen möglichen Figuren von I_G,also Punkte,Geraden und Ebenen,geometrische Objekte sind,denn ihre Vereinigung bildet in dem definierten Sinn ein Modell der Geometrie. Wenn wir unter dieser Aussage jedoch mehr als eine Definition von "geometrischem Objekt" ver=stehen,kommen wir in Schwierigkeiten.Etwa mit dem Schluß: Geometrische Punkte haben keine Ausdehnung.In der benutzten Objektsprache ist dieser Satz nicht ausdrückbar.Aus der Tatsache, daß ein Objekt in einem Modell der Geometrie vorkommt,läßt sich nicht auf dessen Ausdehnung schließen.Ein solcher Schluß ist nur möglich, wenn man voraussetzt,daß die Relationen $\leqslant$,Z und K in ihrer Standardbedeutung operativ überprüft und daß die Objekte von I_G real sind.Man kann unter dieser Voraussetzung "erschließen",daß z.B.

die Punkte in I_G keine Ausdehnung haben. Dann jedoch (d.h. wenn die Punkte keine Ausdehnung haben) ist ein operatives Überprüfen der Relationen offenbar unmöglich.

Noch merkwürdiger ist die Situation bei Benutzung von T_2. Intuitiv bedeutet $I_G \in A(K_2)$, daß sich die partiellen möglichen Figuren von I_G durch Abstandsfunktionen ergänzen lassen und daß es eine abgeschlossene, verträgliche Figurenmenge gibt, welche diese ergänzten Figuren enthält. Man beachte, daß in einer syntaktischen Schreibweise dieser Ramsey-Satz zwei Existenzquantoren enthält, einen Quantor für die theoretische Größe "Abstand" und einen für eine Figurenmenge. Wenn nur theoretische Größen im Ramsey-Satz quantifiziert auftreten und wenn T_2 eine adäquate Rekonstruktion der Geometrie ist, so gibt es in der Geometrie nicht nur theoretische Relationen, sondern auch theoretische <u>Objekte</u>. Analog zu T10 erhalten wir.

<u>T11</u> a) Aus $I_G \in A(K_2)$ folgt, daß I_G einbettbar ist in eine Geometrie.

b) Es gibt endliche Mengen X partieller möglicher Figuren, sodaß $X \in A(K_2)$ gilt

Beweis: T11-a folgt aus T8. Zum Beweis von b) wähle man für X die einelementige Menge X=
$\{[\{a,b,c\},\{\alpha,\beta,\gamma\},\{A\},\{[c,\alpha],[b,\alpha],[a,\beta],$
$[c,\beta],[a,\gamma],[b,\gamma],[a,A],[b,A],[c,A]\},\emptyset,$
$\{[a,a,a,a],[a,a,b,b],[a,a,c,c],[a,b,a,b],$
$[a,b,b,a],[a,c,a,c],[a,c,c,a],[b,a,b,a],[b,a,a,b],$
$[b,b,a,a],[b,b,b,b],[b,b,c,c],[b,c,b,c],[b,c,c,b],$
$[c,a,c,a],[c,a,a,c],[c,b,c,b],[c,b,b,c],[c,c,a,a],$
$[c,c,b,b],[c,c,c,c]\}]\}.$

Die Aussage von T11-b scheint T_2 einen Hauch von Realismus zu verleihen.In Anbetracht der Beweisskizze im Anschluß an T9 ist aber für endliches X der Satz $X \in A(K_2)$ trivial.Den Grund hierfür verstehen wir besser im Zusammenhang mit T11-a.Fragen wir zunächst,ob wir aus der Ein=bettbarkeit von I_G in eine Geometrie Folgerungen über die Ausdehnung oder über den Idealisierungs=grad der Objekte ziehen können.Genau wie bei T10 läßt sich hier ohne die Voraussetzung,daß die vorliegenden Relationen mit üblichen Ver=fahren nachgeprüft wurden,überhaupt nichts er=schließen.Denn,wie auch immer die Objekte von I_G beschaffen sein mögen,durch geeignete Definition der Relationen $\leq$,Z und K läßt sich immer die Gültigkeit von $I_G \in A(K_2)$ erzwingen. Aber selbst dann,wenn diese Relationen für I_G ihre übliche Bedeutung haben und auch tatsäch=lich erfüllt sind,können wir nicht auf die "geometrische Natur" der Objekte von I_G schließen.Denn die bloße Forderung der Existenz einer abgeschlossenen und verträglichen Figuren=menge,welche die Elemente von I_G enthält,hat keine Implikationen für die Objekte in I_G.Es ist ja möglich,diese abgeschlossene und ver=trägliche Figurenmenge X abstrakt vorzugeben (etwa im $\mathbb{R}^3$) und die "real gegebene" Menge I_G in der früher beschriebenen Weise in X "hin=einzudefinieren".Erst wenn man fordert,daß auch die Objekte von X real sein müssen und die Be=ziehungen zwischen ihnen und den Objekten von I_G durch Standardoperationen überprüfbar sind, kann die empirische Behauptung $I_G \in A(K_2)$ die Objekte von I_G näher charakterisieren. Aber auch hier haben wir dann den Widerspruch zwischen geforderter "Realität" der Objekte und axiomatisch postulierter "Idealisierung".

Aus der mit T_3 formulierten empirischen Behauptung lassen sich mit T6 keine Schlüsse ziehen.Wir bemerken,daß I_G in diesem Fall end= lich sein kann und daß auch reale,ausgedehnte Objekte in I_G die empirische Behauptung er= füllen können.Dies liegt daran,daß in K_3 keine Postulate auftreten,welche etwa unendliche Teilbarkeit oder Verlängerbarkeit von Strecken fordern.

ii) Meßmethoden

Wir analysieren nun einige Standard-Meßmethoden der Längenmessung.Vorweg möchten wir auf eine Unterscheidung hinweisen,die für Überlegungen im Zusammenhang mit Meßmethoden nützlich er= scheint,jedoch bisher nicht beachtet wurde. Insbesondere für die Frage der Theoretizität und für die Begründung von Theoretizitäts= kriterien dürfte diese Unterscheidung von großer Bedeutung sein.Unabhängig davon,was man nun genau unter einer Meßmethode oder Meßtheorie versteht,läßt sich folgende Unterscheidung treffen.

D26 a) Eine Meßmethode oder Meßtheorie heißt *direkt*,wenn in ihrer Beschreibung keine logischen Ableitungen vorkommen

b) Eine Meßmethode heißt <u>indirekt</u>,wenn sie nicht direkt ist.

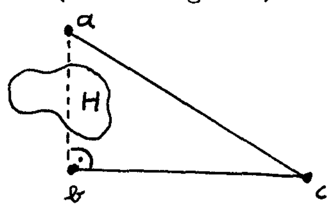
Eine indirekte Meßmethode liegt vor,wenn zur Messung einer Größe eine Theorie explizit be=nutzt wird,d.h.,grob gesprochen,wenn der Wert der Größe aus anderen gegebenen Größen berechnet wird.Da jede Berechnung eine logische Ableitung ist,greift hier D26-b.Der interessante Fall liegt vor,wenn die zur Berechnung benutzte Theorie die gleiche ist,aus der die zu messende Größe stammt.Nach Sneeds Kriterium ist diese Größe dann theoretisch.Als Beispiel sei die Berechnung der Masse eines gravitierenden Teil=chens aus der Kenntnis aller Ortsfunktionen und der Massen der anderen Teilchen unter geeigneten Bedingungen genannt.Solche Berechnungen nennt man in der Physik Messungen.

Direkte Meßmethoden dagegen sind in ihrer Beschreibung reine Handlungsanweisungen.Ein typisches Beispiel bildet die Längenmessung mit Hilfe eines Meterstabes,die schon von Kindern beherrscht wird.Es sind diese Fälle direkter Meßmethoden,bei welchen Sneeds Kriterium schwer nachzuprüfen ist.Nur hier tritt das Problem auf,was denn mit "voraussetzen" (im Englischen "presuppose",vergl.(20),S.31) genau gemeint ist.Die Explikation von Steg=müller,nach der "voraussetzen" bedeutet,daß "die Beschreibung der Methode zur Ermittlung des Wertes $f_i(x_o)$ so geartet ist,daß aus den Sätzen,welche eine Spezialisierung der Methode zur Gewinnung von $f_i(x_o)$ darstellen,ein Satz logisch gefolgert werden kann,der für ein j den Satz $c_j \in S$ L-impliziert" (siehe (22),S. 51),ist nur dann brauchbar,wenn die in den Handlungsanweisungen eventuell verborgenen theoretischen Strukturen explizit gemacht werden.So können wir etwa aus der Meßvorschrift "Lege ein Metermaß an die beiden Punkte,deren Abstand du messen willst,sodaß die Null=markierung genau an dem einen Punkt liegt und lies die Markierung ab,an der der andere Punkt liegt" nicht direkt folgern,daß der Maßstab und die Punkte ein Modell der Geometrie bilden müssen.Eine solche Folgerung setzt eine Ex=plizitmachung der Tatsache voraus,daß der Maß=stab <u>gerade</u> sein muß,genauer,daß er ein Modell einer euklidischen Geraden sein muß.

Wir betrachten vier Meßmethoden,davon zwei direkte und zwei indirekte.Die erste Methode ist die der Triangulation.Das Musterbeispiel hierzu stammt aus dem Schulunterricht.

<u>B6</u> Die Entfernung zweier Punkte a und b,zwischen denen ein Hindernis liegt,soll gemessen werden. Man versucht,ein rechtwinkliges Dreieck so zu legen,daß die gesuchte Strecke eine der Seiten ist und daß die beiden anderen Seiten vermessen werden können (siehe Figur 2).

Figur 2

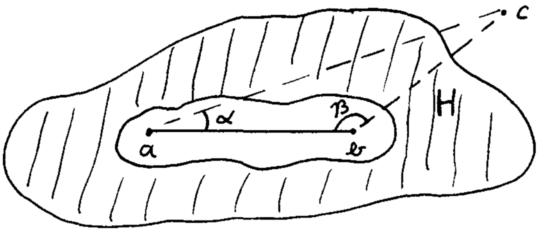


Nach dem Satz von Pythagoras können wir aus den beiden gemessenen Strecken (im Bild ac und bc) die gesuchte Entfernung be=rechnen.

Die zweite Methode benutzt die Messung von Winkeln.

B7 In einer Situation,wie sie in Figur 3 dar=gestellt ist,soll die Entfernung zwischen a und c gemessen werden.

Figur 3



Nach dem Kosinussatz gilt: $d(a,c)^2=d(a,b)^2+d(b,c)^2-2d(a,b)d(b,c)\cos\beta$ und $d(b,c)^2=d(a,c)^2+d(a,b)^2-2d(a,c)d(a,b)\cos\alpha$ .Aus diesen beiden Gleichungen läßt sich d(a,c) berechnen,falls α, β und d(a,b) gegeben sind.

Dieses sind typische Beispiele einer indirekten Meßmethode.Man verwendet die Geometrie,um den Wert einer bestimmten geometrischen Größe,hier des Abstandes,aus gegebenen anderen Größen zu berechnen.Hierbei setzt man voraus,daß in den betreffenden Anwendungen Modelle der Geometrie vorliegen.Denn nur dann kann man die erwähnten Sätze anwenden.

Als Drittes betrachten wir keine eigentliche Meßmethode,sondern eine spezielle Messung,die nur unter ganz bestimmten,glücklichen Umständen funktioniert.

B8 Es dreht sich darum,den Abstand zweier Punkte zu ermitteln,die genau eine Längen=einheit voneinander entfernt sind.Nehmen wir an,die Längeneinheit sei das Pariser Urmeter, so wäre die folgende Beschreibung eine An=leitung zur Messung.Lege einen Gegenstand neben das Pariser Urmeter,sodaß ein markierter Punkt a des Gegenstandes mit dem einen Ende des Urmeters und eine Marke b auf dem Gegenstand mit dem anderen Ende des Ur=meters zusammenfällt.Bringe nun den Gegenstand zu den Punkten,deren Abstand du messen willst. Versuche,ihn so zu legen,daß die beiden Punkte auf die Marken a und b zu liegen kommen.Gelingt dies,so sind beide Punkte eine Längeneinheit voneinander entfernt.

Die vierte Meßmethode schließlich ist die Längenmessung mittels eines Metermaßes.

B9 Zum Zweck der Analyse beschränken wir uns auf den einfachsten Fall,bei dem der Abstand zweier Punkte,die zwei Längeneinheiten von=einander entfernt sind,gemessen werden soll. Weiter sei ein Maßstab der Länge 1 gegeben.Die Meßvorschrift lautet nun: Lege eine Gerade so, daß sie beide Punkte gleichzeitig berührt.Lege den Maßstab an die Gerade,sodaß sein eines Ende a mit einem der Punkte (etwa a′) zu=sammenfällt.Markiere die Lage des anderen Endes des Maßstabes auf der Geraden durch eine Marke c.Lege nun den Maßstab so an die Gerade,daß sein Ende a an der Marke c liegt und sein anderes Ende b in Richtung auf den noch nicht benutzten Punkt b′ zeigt. Fallen b und b′ zusammen, so sind a′ und b′ zwei Längeneinheiten voneinander entfernt.

Bei B8 und B9 handelt es sich um direkte Meßmethoden. Die hiermit verknüpften Probleme werden sogleich bei der Untersuchung der Theoretizität zur Sprache kommen.

iii) Theoretizität

Wir fragen, ob die Abstandsfunktion d eine theoretische Größe im Sinne von Sneed ist. Zunächst ist zu bemerken, daß die von Stegmüller vorgenommene Präzisierung des Kriteriums in einem Punkt noch etwas unklar ist (siehe (22), S.45 ff). Hierbei handelt es sich um die Präzisierung der Aussage, daß eine Anwendung der Theorie erfolgreich ist. Bei Stegmüller bedeutet dies die Gültigkeit eines Satzes $x_j \in S$, wobei x_j als potentielles Modell für die betreffende Anwendung steht und S die Klasse der Modelle der Theorie bezeichnet. Diese Interpretation ist jedoch nur bei Zugrundelegung eines einzigen Anwendungsbereiches adäquat. Denn wenn, wie bei Sneed, mehrere beschränkte Anwendungen zugelassen sind, so können wir die Klasse S der Modelle nicht als die Klasse derjenigen Entitäten auffassen, die durch die Theorie charakterisiert werden. Anstelle von S muß vielmehr A(K) treten. Erst dann sind diejenigen Postulate berücksichtigt, welche die Eigenschaften sich überschneidender Anwendungen kennzeichnen. Insbesondere bei unserer Rekonstruktion der Geometrie sind ja diese Postulate ein wesentlicher Be=

standteil der Theorie.

Je nachdem, ob die Constraints einer Theorie transitiv sind oder nicht, wird man "erfolgreiche Anwendung" anders definieren müssen.

D27 a) Eine Anwendung der Theorie T_i (i=1,2,3) ist eine partielle mögliche Figur

b) Eine partielle mögliche Figur F ist eine erfolgreiche Anwendung von T_1 wenn $F \in I_G \in A(K_1)$

c) Eine partielle mögliche Figur F ist eine erfolgreiche Anwendung von T_2 (bzw. T_3) wenn gilt

$\{F\} \in A(K_2)$ (bzw. $\{F\} \in A(K_3)$)

Für die nicht-transitiven Constraints von T_1 ist die einelementige Menge $\{F\}$ sicher kein Element von $A(K_1)$. Daher können wir in diesem Fall "erfolgreich" nur so definieren, daß F eine intendierte Anwendung ist und daß die empirische Behauptung der Theorie erfüllt ist. Wir versuchen nun, das Sneedsche Theoretizitätskriterium auf die Abstandsfunktion anzuwenden. Nach diesem ist die Funktion n theoretisch bezüglich der Theorie Θ " if and only if there is no application i of Θ in which n_i is Θ-independent" (vergl.(20), S.33). Und n_i ist Θ-independent "if and only if it is not measured in a Θ-dependent way" ((20), S.31). Dies schließlich ist der Fall "if and only if there is some individual $x \in D_i$ such that the existing exposition of application i of theory Θ contains no description of a method of measuring $n_i(x)$ which does not presuppose that some application of Θ is successful" ((20), S.31).Im Fall der Theorien T_2 und T_3 ist d aus logischen Gründen theoretisch,denn gemäß D27-c und früheren Bemerkungen ist jedes F eine erfolgreiche Anwendung der Theorie.Es bleibt also nur die Theorie T_1 zu untersuchen. Wir betrachten die vier beschriebenen Meß=methoden B6-B9.Die beiden indirekten Meßmethoden B6 und B7 sind offenbar T_1-abhängig.In B8 und B9 dreht es sich,wie schon erwähnt,darum,implizite Voraussetzungen aufzufinden,denn in den vor=liegenden Formulierungen lassen sich keine Hin=weise auf T_1-Abhängigkeit finden.Im Fall B8 wird implizit vorausgesetzt,daß der zur Messung benutzte Gegenstand starr ist,d.h.daß sich seine geometrischen Eigenschaften in der Zeit der Messung nicht ändern.Will man die geschilderte Methode im Formalismus beschreiben,so wird man zwei Anwendungen unterscheiden.Die erste An=wendung beschreibt die "Eichung" des Gegenstandes am Urmeter,die zweite Anwendung beschreibt die eigentliche Messung.Wir stellen nun fest,daß die Forderung der Starrheit nichts anderes ist als der (=,=)-Constraint.Denn dieser fordert ja, grob gesprochen,daß derselbe Gegenstand in ver=schiedenen Anwendungen dieselben geometrischen Eigenschaften haben soll.Es wird also nicht nur eine Anwendung als erfolgreich vorausgesetzt, sondern deren zwei.

Am Schwierigsten ist die Situation bei B9. Die implizite Voraussetzung steckt hier im Be=griff der Geraden.Es bieten sich zwei Möglich=

keiten an.Erster Fall : Der Begriff der Geraden läßt sich ohne geometrische Theorie festlegen.Dann ist d nicht theoretisch,denn für diese negative Feststellung genügt ein einziges Beispiel,in dem d T_1-unabhängig ge= messen werden kann.Zweiter Fall: Geraden lassen sich nicht vor-geometrisch charakterisieren, d.h.jede Kennzeichnung von Geraden (oder auch Ebenen) setzt bereits einen Teil der Geometrie voraus.Dann ist d vermutlich theoretisch be= züglich T_1,denn jede der besprochenen Meß= methoden ist T_1-abhängig und diese Methoden decken ein breites Spektrum aus allen möglichen Methoden der Längenmessung ab.

Das gesammelte Material über die Theorien T_1,T_2,T_3 möge nun dazu dienen,dieselben zu ver= gleichen,wobei das Ziel die Ermittlung einer der drei Theorien als der adäquatesten Rekon= struktion ist.Zunächst bemerken wir,daß allen drei Theorien der im Anschluß an T10 diskutierte Mangel anhaftet,daß die Objekte der Theorien bei völlig willkürlicher Etablierung der Relationen zwischen ihnen in keinem klaren Sinn als <u>geometrische Objekte</u> charakterisiert werden. Um es zu wiederholen: Man nehme <u>irgendeine</u> überabzählbare Menge beliebiger Objekte (falls es so etwas gibt) und definiere zwischen diesen Objekten Relationen $\leqslant$,Z und K,sodaß die ent= stehende Struktur eine Geometrie wird.

Die hier auftretende Schwierigkeit ist von fundamentaler Bedeutung für ein empiristisches Programm.In (4) versuchte Carnap,zu argumentieren, daß eine rein logische Kennzeichnung nichtabstrakter Strukturen möglich sei.Carnaps Auffassung stieß auf heftige und berechtigte Kritik.Die bei unserer Rekonstruktion der Geometrie auftretende Schwierigkeit ist gerade ein Spezialfall des allgemeinen Einwands,der darauf beruht,daß man mit Hilfe der Logik nicht zwischen isomorphen Modellen unterscheiden kann.

Dieser Einwand bedeutete jedoch nicht das Ende des empiristischen Programms,sondern eine Modifikation von Carnaps Vorschlag.Man nimmt einfach an,daß auf sehr tiefliegenden Stufen die Prädikate oder Relationen nicht logisch, sondern ostensiv oder nicht-verbal Bedeutung erlangen.Daß diese Auffassung haltbar ist,hat Przelecki in (16) überzeugend dargelegt.

Nun ist die Geometrie in der Hierarchie physikalischer Theorien eine sehr tiefliegende Theorie,eine Basistheorie,unter der keine weitere physikalische Theorie mehr zu vermuten ist.Wir befinden uns also genau an einer Stelle, an der Prädikate nicht-verbal einzuführen sind. Die Relationen $<$,Z und K mögen einer weiteren, vor-geometrischen Charakterisierung durch logische Strukturen durchaus fähig sein,in der Praxis befinden wir uns aber hier bereits in einer Zone,in der Begriffe durch Handlungen eingeübt werden.Ohne die Sinnlosigkeit weiterer logischer Untersuchungen der betreffenden Relationen präjudizieren zu wollen,setzen wir für den Rest dieser Arbeit voraus,daß die Relationen $<$,Z und K bereits eine wohlbestimmte ostensive,operationale oder nicht-verbale Bedeutung haben.

Unter dieser Voraussetzung können wir sagen, daß T_1 Punkte,Geraden und Ebenen als geometrische Objekte charakterisiert.Denn,wenn diese Objekte als real aufgefaßt werden,so können wir durch sukzessives Nachprüfen der geometrischen Relationen feststellen,daß die Objekte die idealen geometrischen Eigenschaften besitzen müssen,die sie auch in unserer Vorstellung haben. Dies ist jedoch nicht der Fall für T_2 und T_3, wie im Anschluß an T11 ausgeführt wurde.In T_2 ist das Verhältnis der Objekte von I_G und der Objekte der im Constraint quantifizierten Figurenmenge durch die Postulate allein nicht hinreichend festgelegt.Noch krasser tritt dieser Mangel bei T_3 zutage,wo ja ein Teil der Axiome einfach fehlt.Wir können also festhalten: Durch T_2 und T_3 werden ohne Zusatzannahmen die Objekte nicht als geometrische Objekte charakterisiert.

Es ist zu fragen,ob dieser Mangel von T_2 und T_3 nicht durch metatheoretische Voraussetzungen, etwa durch Vorschaltung einer geeigneten Theorie, die Geraden und Ebenen charakterisiert,behoben werden kann.* In Anbetracht von (8) scheint es möglich,Theorien zu rekonstruieren,welche die geometrischen Objekte: Punkt,Gerade,Ebene mit Begriffen unserer lebensweltlichen Erfahrung zusammenbringen und aus diesen konstituieren. Wir vermeiden es,auf diesen Punkt näher einzu=

---

*) Auf diesen Punkt hat mich Prof.Sneed hinge= wiesen.

zugehen,weil es hier enorme Schwierigkeiten gibt und weil wir im Moment auch keinen eigenen Beitrag leisten können.Wenn die Rekonstruktion solcher "vor-geometrischer" Theorien gelingen sollte,so wäre für uns der interessanteste Punkt,festzustellen,wieviel Geometrie "in solcher Theorie steckt",d.h. welche Axiome der Geometrie durch Vorschaltung einer derartigen Theorie eingespart werden können.Wir vermuten,daß tatsächlich einige der Axiome,aber nicht alle,wegfallen werden.Wenn diese Vermutung richtig ist,so bedeutet dies, daß die Theorie T_1 auch die Charakterisierung der geometrischen Objekte,wie sie aus handwerk=lich-technischen Erfahrungen gewonnen wird, enthält.Man kann dann nicht sagen,T_1 sei in=adäquat,weil sie solche Charakterisierungen nicht enthält,sondern höchstens bemängeln,daß diese Charakterisierung im Gegensatz zur historischen Entwicklung nicht gesondert re=konstruiert wird.Wir halten fest: Die Vor=schaltung einer Theorie zur Charakterisierung der geometrischen Objekte würde T_2 und T_3 verbessern und dem Gehalt nach an T_1 heran=bringen.

Ein Nachteil von T_3 ist,daß hiermit in=direkte Meßmethoden,wie sie in B6 und B7 ge=schildert sind,nicht durchführbar sind.Die logische Struktur von T_3 ist einfach zu schwach, um den Beweis etwa des Satzes von Pythagoras zu erlauben.In T_1 und T_2 können solche Sätze be=wiesen werden,indem man die betreffende abge=

schlossene und verträgliche Figurenmenge gemäß T6 in eine Geometrie einbettet,dort den fraglichen Satz beweist und ihn dann auf Grund der Verträglichkeit und daraus folgender Lemmata auf die betrachtete Figur überträgt. Dieser Mangel von T_3 ist so schwerwiegend,daß wir T_3 allein nicht als adäquate Rekonstruktion der Geometrie ansehen können.Die Theorie ist deshalb nicht uninteressant,sie eignet sich unter Umständen als gemeinsame Basis euklidischer und nicht-euklidischer Geometrien, wobei hier unter den nicht-euklidischen auch Riemannsche Geometrien subsumiert sind.Eine Aufgabe für die Zukunft ist es,eine solche maximale Basis der verschiedenen Geometrien herauszuarbeiten und zu sehen,wie die verschiedenen Geometrien durch verschiedenartige Verstärkungen dieser Basis entstehen.

Ein letzter Mangel von T_2 und T_3 besteht darin,daß mit diesen Theorien keine Orts=funktion definierbar ist.Ohne hier Details aus der Raum-Zeit-Theorie vorwegnehmen zu müssen, können wir intuitiv kurz schildern,wie von der Abstandsfunktion zu einer Ortsfunktion überzu=gehen ist.Wir denken uns eine Menge von Punkten und deren Abstände gegeben.Vier der Punkte sollen nicht co-planar sein.Dann können wir von einem dieser vier Punkte aus Geraden durch jeden der drei anderen Punkte legen.Diese drei Geraden bilden ein (eventuell schiefwinkliges) Koordinatensystem.Die Koordinaten jedes weiteren Punktes x werden nun wie folgt bestimmt.Man fällt das Lot von x auf jede der drei Koordinatenachsen und erhält auf jeder dieser Achsen einen Punkt.Der Abstand der so erhaltenen Punkte zu dem Schnittpunkt der Koordinaten= achsen ist dann genau die Koordinate des Punktes x in der betreffenden Richtung.Die volle euklidische Geometrie gewährleistet die Ein= deutigkeit und den Erfolg dieses Verfahrens.

So können wir in T_1 Koordinaten definieren, indem wir zunächst I_G gemäß T6 einbetten in eine Geometrie,dann dort die Koordinaten kon= struieren und sie schließlich wieder in die vorliegenden Figuren rückübersetzen.Bei T_3 funktioniert dieses Verfahren nicht,aber auch bei T_2 kommen wir in Schwierigkeiten.Zwar können wir von vorgegebenen Punkten in I_G übergehen zu deren Koordinaten in einer abge= schlossenen und verträglichen Figurenmenge,wie sie im Constraint als existent gefordert ist. Aber wir haben keine Garantie,daß die Schnitt= punkte der Lote mit den Koordinatenachsen Punkte sind,die <u>in I_G</u> liegen.Wir können daher unter günstigen Umständen zwar Zahlen als Koordinaten eines Punktes bezüglich eines ge= gebenen Koordinatensystems berechnen,nicht aber diese Zahlen aus den vorgegebenen Anwendungen definieren.

Wir kommen so zu dem Resultat,daß T_1 die adäquateste der drei Rekonstruktionen ist.Es muß jedoch noch auf zwei Unvollkommenheiten dieser Rekonstruktion eingegangen werden.

Die erste Unvollkommenheit liegt darin,daß Geraden und Ebenen als Grundbegriffe in unserem formalen System überflüssig sind.* Dies erkennt man so. Zu zwei verschiedenen Punkten a,b definieren wir $g_{a,b} := \{c / Z(a,c,b) \vee Z(c,a,b) \vee Z(a,b,c)\}$. Da es zu je zwei verschiedenen Punkten nach den Axiomen genau eine Gerade gibt, welche mit ihnen inzidiert, können wir die durch a,b so definierte Gerade durch $g_{a,b}$ ersetzen. Hierzu ist nur erforderlich, Mengenterme in der Sprache zuzulassen. Die Inzidenzrelation von D9 wird dann zur gewöhnlichen Elementschaftsrelation der Mengenlehre. Genauso verfährt man mit Ebenen und erhält auf diese Weise ein äquivalentes Axiomensystem, in dem Geraden und Ebenen als Grundbegriffe eliminiert sind.

Wenn dem so ist, warum verzichten wir dann nicht auf Geraden und Ebenen? Weil dann relevante Vorhersagen der Geometrie nicht mehr formulierbar sind. Betrachten wir ein Beispiel.

<u>B10</u> "Die Maus ist in diesem Drahtkasten". Wenn uns zur Formulierung dieser Aussage keine Geraden und Ebenen zur Verfügung stehen, dann müssen wir sowohl den Drahtkasten als auch die Maus durch endlich viele Punkte beschreiben. Natürlich erhalten wir dann ein recht grobes Bild der Situation. Daß das mausartige Gebilde in den Drahtkasten (dieser ebenfalls durch Punkte dargestellt) paßt, kann man versuchsweise unter Benutzung der Zwischenrelation so ausdrücken. Jeder Punkt der "Maus" liegt

---

*) Diese Bemerkung verdanke ich Prof. Sneed.

zwischen zwei Punkten des "Kastens".Da wir aber nur endlich viele Punkte zur Verfügung haben,ist es möglich,daß gewisse Singularitäten bei der Beschreibung durch Punkte nicht berück=sichtigt werden.So könnte man etwa den Schwanz der Maus durch zwei Punkte,einen für die Schwanzwurzel und einen für die Schwanzspitze, beschrieben haben.Wenn nun die Maus den Schwanz in einer Schleife aus dem Drahtkasten heraus=hängen läßt,sodaß die Schwanzspitze sich wieder im Kasten befindet,so wäre die Aussage "Die Maus ist im Kasten" in der geometrischen Ver=gröberung richtig,in Wirklichkeit jedoch falsch. Solche Situationen lassen sich bei endlichen Punktmengen prinzipiell nicht vermeiden.

Dies zeigt,daß Geraden und Ebenen eigenständige Grundbegriffe sind,die wir für die Anwendung der Geometrie brauchen.Es wäre eine wünschenswerte, aber äußerst schwierige Aufgabe,unser Axiomen=system so umzubauen,daß die Zwischenrelation auch für Punkte und Geraden oder Punkte und Ebenen durch Axiome geregelt ist.In Modellen der vollen Geometrie lassen sich solche Relationen stets mit der Zwischenrelation für Punkte definieren, in endlichen Figuren dagegen nicht.

Die zweite Unvollkommenheit liegt in der starken Idealisierung,welche mit T_1 verbunden ist.Bei operationaler Interpretation der geo=metrischen Relationen können z.B. Punkte "praktisch" keine Ausdehnung haben.Damit ist folgendes gemeint: Wenn ein Punkt so "groß" ist, daß man auf ihm zwei verschiedene Marken an=

bringen kann,so lassen sich diese Marken wieder als Punkte auffassen und zwischen ihnen muß nach den Axiomen ein weiterer Punkt liegen. Diese Idealisierung stellt jedoch keine echte Schwierigkeit dar.Alle bisherigen physikalischen Theorien besitzen diesen hohen Idealisierungs=grad.Die Verbindung zur nicht-idealen Realität wird durch geeignete Approximationstheorien hergestellt,auf die wir im Fall der Geometrie im nächsten Abschnitt eingehen wollen.

VI APPROXIMATIVE GEOMETRIE

Wir stellen zunächst einige allgemeine Be= griffe bereit,mit denen sich die Approximation mengentheoretisch dargestellter Theorien be= schreiben läßt.Ludwig benutzte in (12) erst= mals den topologischen Begriff der uniformen Struktur zur Beschreibung von Approximation in physikalischen Theorien.Moulines (15) übertrug Ludwigs Idee auf den Sneedschen Formalismus.Wir benutzen die Arbeit von Moulines als Ausgangspunkt,modifizieren dabei aber seine Definitionen an einigen Stellen. Grundlegend für das Folgende ist der topologische Begriff der uniformen Struktur (vergleiche (17), S.102).

<u>D28</u> Es sei $M \in \mathfrak{M}$ und $U \subseteq M \times M$.

a) $\Delta_U := \{[x,x] / \exists y \in M([x,y] \in U) \vee \exists y \in M([y,x] \in U)\}$

b) $U^2 := \{[x,y] / \exists z([x,z] \in U \wedge [z,y] \in U)\}$

c) $U^{-1} := \{[y,x] / [x,y] \in U\}$

d) $\mathcal{N}$ ist eine <u>uniforme Struktur</u> auf M (in Zeichen: US($\mathcal{N}$,M)) wenn gilt

1) $\mathcal{N} \subseteq Pot(M \times M)$
2) $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}$ und $\emptyset \notin \mathcal{N}$
3) $\forall U,U' (U \in \mathcal{N} \wedge U \subseteq U' \rightarrow U' \in \mathcal{N})$
4) $\forall U,U' (U \in \mathcal{N} \wedge U' \in \mathcal{N} \rightarrow U \cap U' \in \mathcal{N})$
5) $\forall U(U \in \mathcal{N} \rightarrow \Delta_U \in \mathcal{N})$
6) $\forall U(U \in \mathcal{N} \rightarrow U^{-1} \in \mathcal{N})$
7) $\forall U' \exists U(U' \in \mathcal{N} \rightarrow U^2 \subseteq U' \wedge U \in \mathcal{N})$

Δ_U heißt die Diagonale von U.Stellt man sich

U nämlich als Zahlenebene vor mit recht=winkligen Koordinaten,so ist Δ_U genau die Hauptdiagonale in dieser Ebene.Um die weiteren Bestimmungen intuitiv zu verstehen,stellen wir uns vor,daß $[x,y] \in U$ bedeute "x und y sind sich ähnlich".Dann bedeutet $[x,y] \in U^2$,daß x einem z ähnlich ist und z wiederum y ähnlich ist.Hieraus kann aber nicht geschlossen werden,daß auch x und y ähnlich sind.U^{-1} ist die zu U inverse Relation.Nach D28-d1 sind die Elemente von $\mathcal{N}$ Teilmengen von $M \times M$.Ein solches Element U ist also eine Menge von Paaren $[x,y]$ mit der Eigenschaft,daß x und y sich ähnlich sind.Solange wir nur einzelne dieser Mengen U betrachten,bleibt der durch eine Menge U ausgedrückte Begriff der Ähn=lichkeit recht unbestimmt.Erst wenn wir mehrere Mengen U_i miteinander vergleichen, können wir etwa zu Aussagen der Art "die Elemente der Paare in U_1 sind sich ähnlicher als die in U_2" gelangen.Es liegt nahe,diesen Komparativ durch eine Mengeninklusion auszu=drücken.Danach bedeutet $U_1 \subseteq U_2$,daß die Elemente der Paare in U_1 sich ähnlicher sind,als die in U_2,denn wenn x und y sich "sehr ähnlich" sind,dann sind sie auch "weniger ähnlich".Es ist klar,daß durch zu=sätzliche Forderungen an die U_i das qualitative "ist ähnlicher als" weiter aus=differenziert werden kann.Unter diesem Ge=sichtspunkt sind die Bestimmungen D28-d2-d7 zu verstehen.2)-4) besagen,daß $\mathcal{N}$ ein Filter ist (vergleiche (17),S.41).Bestimmung 5) besagt,daß mit jeder Menge von Paaren,deren Glieder sich ähnlich sind,auch die Menge aller Paare,deren Glieder identisch sind, zu $\mathcal{N}$ gehört.Nach 6) ist $\mathcal{N}$ symmetrisch und nach 7) ist $\mathcal{N}$ verfeinerbar in dem Sinn,daß es zu jedem $U' \in \mathcal{N}$,welches einen gewissen "Ähnlichkeitsgrad" darstellt,einen soviel weitergehenden Ähnlichkeitsgrad (dargestellt durch U) gibt,daß sogar die Elemente der Paare von U^2 sich noch ähnlicher sind als die von U'. Für eine physikalische Begründung dieser Forderungen verweisen wir auf (12),S.75-78.

Moulines macht in seiner Arbeit haupt=sächlich Gebrauch von folgendem in D29-a definierten Begriff.

D29 Es gelte $US(\mathcal{N},M)$, $x,y \in M$ und $X,Y \subseteq M$.

a) $x \sim_{\mathcal{N}} y \;\equiv\; \exists U \in \mathcal{N}\,([x,y] \in U)$

b) $X \approx_{\mathcal{N}} Y \;\equiv\; |X| = |Y| \wedge \forall x \in X\, \exists y \in Y (x \sim_{\mathcal{N}} y)$

Wir könnten versuchen,die Relation $x \sim_{\mathcal{N}} y$ zu lesen als "x ist bezüglich $\mathcal{N}$ ähnlich zu y". Gemäß unseren Ausführungen im Anschluß an D28 ist es jedoch der Zweck von D28,eine spezifische komparative Ordnung bezüglich der Ähnlichkeit herzustellen.Bei Verwendung von D29-a wird diese spezifische Struktur völlig ignoriert.Denn die Menge U,die ja einen Ähn=lichkeitsgrad ausdrückt,darf beliebig ausge=wählt sein.Im Gegensatz zu Moulines werden wir die Ähnlichkeitsrelation auf der theoretischen Ebene der Theorie ansetzen.Daher müssen wir die Ähnlichkeit nicht nur für Modelle, sondern für ganze Modellmengen,wie sie in den Constraints vorkommen können,betrachten. D29-b stellt hier einen ersten Versuch dar. Gegeben sind zwei Mengen X und Y unter der Voraussetzung,daß eine Ähnlichkeitsrelation zwischen deren Elementen bereits besteht.Dann sind auch die Mengen X und Y ähnlich,wenn sie gleichmächtig sind und wenn es zu jedem Element von X ein ähnliches Element in Y gibt.D29-b ist jedoch inadäquat,denn erstens wird sie auch von solchen X,Y erfüllt,bei denen alle Elemente von X ähnlich zu einem einzigen Element von Y sind.Und zweitens dürfen die zu $x \in X$ ähnlichen Elemente $y \in Y$ gemäß D29-a in beliebigem Grad ähnlich sein,sodaß also einige Elemente von X "sehr ähnliche",andere Elemente dagegen "ganz wenig ähnliche" Gegen=stücke in Y haben können.Dem ersten Punkt wird abgeholfen,indem die Relation,welche die Elemente von X mit ähnlichen Elementen von Y verknüpft,zu einer bijektiven Relation ver=stärkt wird.Den zweiten Punkt umgehen wir, indem wir nicht auf die ganze Menge $\mathcal{N}$, sondern auf einen speziellen "Ähnlichkeits=grad" $U \in \mathcal{N}$ relativieren.

<u>D30</u> Es gelte $US(\mathcal{N},M), U \in \mathcal{N}$ und $X,Y \subseteq M$.

$$X \sim_U Y \equiv \exists f: X \to Y \wedge Bij(f) \wedge \forall x \in X([x,f(x)] \in U)$$

D30 drückt aus,daß die Mengen X,Y ähnlich sind bezüglich einer bestimmten Menge U einer uni=formen Struktur.Mit diesem Begriff können wir nun die empirische Aussage einer Theorie in approximativer Form ausdrücken. Wir ver= wenden dabei statt "approximativ" in An= lehnung an Ludwig den Ausdruck "verschmiert".

D31 Es sei $K=[M_{pp},M_p,M,C]$ und $T=[K,I]$ eine Theorie. Weiter gelte $US(\mathcal{N},M_p)$.

a) $A_U(K):=\{X/X\subseteq M_{pp} \wedge \exists Y \exists Z(\bar{r}(Y)=X \wedge Z\in \mathbb{M}(T) \wedge Z \sim_U Y)\}$ heißt <u>U-Verschmierung</u> von A(K)

b) $A_{\mathcal{N}}(K):=\{X/X\subseteq M_{pp} \wedge \exists U\in \mathcal{N}(X\in A_U(K))\}$ heißt <u>$\mathcal{N}$-Verschmierung</u> von A(K)

c) Die <u>bezüglich U verschmierte</u> empirische Behauptung von T ist der Satz $I\in A_U(K)$

d) Die <u>bezüglich $\mathcal{N}$ verschmierte</u> empirische Behauptung von T ist der Satz $I\in A_{\mathcal{N}}(K)$

e) $\mathbb{M}_U(T):=\{Y/Y\subseteq M_p \wedge \exists Z(Z\in \mathbb{M}(T) \wedge Z \sim_U Y)\}$

Intuitiv enthält $A_U(K)$ genau diejenigen Mengen partieller potentieller Modelle, die sich durch theoretische Größen so erweitern lassen, daß ihre Erweiterung ähnlich bezüglich U zu einem $Z\in \mathbb{M}(T)$ ist. $A_{\mathcal{N}}(K)$ ist der entsprechende Be= griff für die ganze Menge $\mathcal{N}$. Man beachte, daß $A_{\mathcal{N}}(K)=\bigcup\{A_U(K)/U\in\mathcal{N}\}$. Es gilt also $A_U(K)\subseteq A_{\mathcal{N}}(K)$ für jedes $U\in\mathcal{N}$. Damit können wir auch zwei verschiedene empirische Behauptungen formulieren. $I\in A_U(K)$ besagt, daß I "in etwa" in A(K) liegt, wobei U ein qualitativer Aus= druck für den Grad des "in etwa" ist. Analog ist D31-d zu interpretieren, nur ist hier der Ungenauigkeitsgrad so groß wie die "unschärfste" Menge U, die in $\mathcal{N}$ noch zugelassen ist. $\mathbb{M}_U(T)$ schließlich ist die U-Verschmierung von $\mathbb{M}(T)$, also der Menge derjenigen Modellmengen, die den Constraint erfüllen.

Wir haben hiermit einen topologischen Approximationsbegriff definiert, der auf Theorien in mengentheoretischer Darstellung allgemein anwendbar ist. Am Beispiel der Geometrie kann nun sogleich nachgewiesen werden, daß dieser Approximationsbegriff brauchbar ist.

Zunächst definieren wir, wann zwei mögliche Figuren strukturgleich sind (D32-a). Dies soll genau dann der Fall sein, wenn sich die Punkte der einen Figur in die Punkte der anderen Figur so überführen lassen, daß dabei Zwischen- und Kongruenzrelation erhalten bleiben. Sind zwei mögliche Figuren F und F′ strukturgleich, so sind sie ähnlich vom Grad r, wenn die Ab= stände je zweier Punkte in F und der ent= sprechenden Punkte in F′ sich höchstens um r unterscheiden. Dabei ist r eine nichtnegative, reelle Zahl. Die Menge aller Paare [F,F′], welche sich ähnlich vom Grad r sind, bezeichnen wir mit U_r (D32-c). $[F,F'] \in U_r$ kann man sich auch wie folgt veranschaulichen. Man denke sich die Figur F gleichmäßig mit einem Wattepolster der Dicke r umgeben. Jede (eventuell von F ver= schiedene) Figur F′, die noch ganz in dieses Wattepolster eingelegt werden kann, ist dann zu F ähnlich vom Grad r. Als uniforme Struktur auf

M_p nehmen wir die in D32-d definierte Menge $\mathcal{N}$. Damit $\mathcal{N}$ zu einem Filter wird, müssen außer den Mengen U_r auch deren Obermengen zugelassen werden.

<u>D32</u> Es seien $F, F' \in M_p^1$ und $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$.

a) F und F' sind <u>strukturgleich bezüglich λ</u> (in Zeichen: $F \lambda F'$) gdw

1) $\lambda : P \to P' \wedge \mathrm{Bij}(\lambda)$

2) $\forall a,b,c \in F(Z(a,b,c) \leftrightarrow Z'(\lambda(a),\lambda(b),\lambda(c)))$

3) $\forall a,b,a',b' \in F(K(a,b/a',b') \leftrightarrow K(\lambda(a),\lambda(b)/\lambda(a'),\lambda(b')))$

b) F und F' heißen <u>λ-ähnlich vom Grad r</u> (in Zeichen: $F[\lambda, r]F'$), wenn gilt $F \lambda F' \wedge \forall a,b \in F(|d(a,b) - d'(\lambda(a),\lambda(b))| \leq r)$

c) $U_r := \{[F,F'] \in M_p^1 \times M_p^1 / \exists \lambda (F[\lambda,r]F')\}$

d) $\mathcal{N} := \{X \subseteq M_p^1 \times M_p^1 / \exists r \in \mathbb{R}\ (r \geq 0 \wedge U_r \subseteq X)\}$

Wir bemerken, daß in der Definition von U_r von der theoretischen Größe Gebrauch gemacht wurde. Unsere uniforme Struktur ist also auf der Menge M_p definiert und nicht, wie bei Moulines, auf M_{pp}. Für Theorien, in denen bereits quantitative Begriffe im nicht-theoretischen Vokabular vorhanden sind, dürfte dieser Unter=schied keine Rolle spielen. Bei solchen Theorien jedoch, bei denen erstmals quantitative Begriffe eingeführt werden, ist unsere Formulierung vor=zuziehen. Das liegt einfach daran, daß es ohne quantitative Begriffe viel schwieriger ist, die partiellen potentiellen Modelle mit einer uniformen Struktur zu versehen. Bei der Geometrie läßt sich zwar eine Ähnlichkeitsrelation auch auf partiellen möglichen Figuren definieren,im Vergleich mit D32 wirkt sie aber ungeheuer kompliziert.

Zunächst können wir zeigen,daß die spezielle Menge $\mathcal{W}$ von D32-d die Bedingungen von D28 erfüllt.

<u>T12</u> Es gilt $US(\mathcal{W},M_p^1)$,wobei $\mathcal{W}$ gemäß D32 erklärt ist.

Beweis: Offenbar ist $\mathcal{W}\subseteq Pot(M_p^1\times M_p^1)$ und $\mathcal{W}\in\mathfrak{M}$. Da $M_p^1\neq\emptyset$ ist,gibt es $F\in M_p^1$.Dann ist $[F,F]\in U_r$ für jedes $r\geqslant 0$,also $U_r\neq\emptyset$ für alle $r\geqslant 0$.Somit ist $\emptyset\notin\mathcal{W}$.Bedingung 3) von D28-d folgt direkt aus der Definition von $\mathcal{W}$.Wir zeigen:

4) $\forall U,U'(U\in\mathcal{W}\wedge U'\in\mathcal{W}\rightarrow U\cap U'\in\mathcal{W})$

Aus $U,U'\in\mathcal{W}$ folgt,daß es $r_1,r_2\geqslant 0$ gibt mit $U_{r_1}\subseteq U$ und $U_{r_2}\subseteq U'$.Sei $r:=\min\{r_1,r_2\}$ und $[F,F']\in U_r$.Dann gilt $F\lambda F'\wedge\forall a,b\in F(|d_F(a,b)-d_{F'}(\lambda(a),\lambda(b))|\leqslant r$ und $r\leqslant r_1$ und $r\leqslant r_2$.Also gilt auch $[F,F']\in U_{r_1}$ und $[F,F']\in U_{r_2}$.Es ist $U_r\subseteq U_{r_1}\cap U_{r_2}$ und damit $U_r\subseteq U\cap U'$,d.h. $U\cap U'\in\mathcal{W}$.

5) $\forall U(U\in\mathcal{W}\rightarrow\Delta_U\in\mathcal{W})$

Zu $U\in\mathcal{W}$ gibt es r mit $U_r\subseteq U$.Wie man leicht nachprüft,ist $\Delta_{U_r}=U_0$.Es folgt $U_0=\Delta_{U_r}\subseteq\Delta_U$, also $\Delta_U\in\mathcal{W}$.

6) $\forall U(U\in\mathcal{W}\rightarrow U^{-1}\in\mathcal{W})$

Zu $U\in\mathcal{W}$ gibt es $U_r\subseteq U$.Aus der Definition von U_r entnimmt man,daß $[x,y]\in U_r\rightarrow[y,x]\in U_r$ gilt.

Es sei nun $[x,y]\in U_r$. Nach dem Gesagten ist dann $[y,x]\in U_r$ und daher $[y,x]\in U$. Dann ist aber $[x,y]\in U^{-1}$. Damit haben wir $U_r\subseteq U^{-1}$ bewiesen, also $U^{-1}\in \mathcal{W}$.

7) $\forall U'\,\exists U(U'\in\mathcal{W}\rightarrow U^2\subseteq U'\wedge U\in\mathcal{W})$

Aus $U'\in\mathcal{W}$ folgt, daß es $r\geqslant 0$ gibt mit $U_r\subseteq U'$.

Sei $r_1:=\frac{1}{2}r$. Wir zeigen

(+) $U^2_{r_1}\subseteq U_r$

Sei $[F,F']\in U^2_{r_1}$. Nach D28-b heißt das

$\exists F''([F,F'']\in U_{r_1}\wedge[F'',F']\in U_{r_1})$ und dies nach

D32 $F\lambda F''\wedge\forall a,b\in F(|d_F(a,b)-d_{F''}(\lambda(a),\lambda(b))|\leqslant r_1)$

$\wedge F''\lambda_1F'\wedge\forall a',b'\in F''(|d_{F''}(a',b')-d_{F'}(\lambda_1(a'),\lambda_1(b'))|$

$\leqslant r_1)$. Wir setzen $\lambda':=\lambda_1\circ\lambda$.

Dann gilt offenbar $F\lambda'F'$. Es seien nun $a,b\in F$. Aus den obigen Ungleichungen mit Beträgen erhalten wir

$-\frac{1}{2}r\leqslant d_F(a,b)-d_{F''}(\lambda(a),\lambda(b))\leqslant\frac{1}{2}r$ und

$-\frac{1}{2}r\leqslant d_{F''}(\lambda(a),\lambda(b))-d_{F'}(\lambda'(a),\lambda'(b))\leqslant\frac{1}{2}r$,

denn $\lambda'(a)=\lambda_1(\lambda(a))$.

Hieraus erhält man

$$d_F(a,b)-d_{F'}(\lambda'(a),\lambda'(b))\leqslant r+d_{F''}(\lambda(a),\lambda(b))+\tfrac{1}{2}r$$
$$-d_{F''}(\lambda(a),\lambda(b))=r \quad\text{und}$$

$$d_F(a,b)-d_{F'}(\lambda'(a),\lambda'(b))\geqslant d_{F''}(\lambda(a),\lambda(b))-$$
$$\tfrac{1}{2}r-\tfrac{1}{2}r-d_{F''}(\lambda(a),\lambda(b))=-r$$

Aus diesen Ungleichungen folgt

$|d_F(a,b)-d_{F'}(\lambda'(a),\lambda'(b))|\leqslant r$, also $[F,F']\in U_r$,

womit (+) bewiesen ist. Nun ist aber $U_{r_1}\in\mathcal{W}$ und aus $U_{r_1}^2 \subseteq U_r \subseteq U'$ folgt dann mit $U:=U_{r_1}$ die Behauptung.

Wir können nun mit Hilfe von U und $\mathcal{N}$ die U-Verschmierung von $A(K_1)$ und die verschmierten empirischen Behauptungen von T_1 formulieren. Hätten wir einen Kern K', für den $A(K')=A_{U_r}(K_1)$ für ein $r \geqslant 0$ richtig wäre, so könnten wir die Theorie $[K', I_G]$ mit Recht eine approximative Geometrie nennen. Solange wir ein solches K' nicht kennen, vermeiden wir es, die Bezeichnung "approximative Geometrie" anzuwenden, weil dadurch der Eindruck entsteht, daß man von einer Theorie im Sinne von D5 redet.

Es soll nun ein Problem zur Sprache kommen, das sich im Spezialfall der Geometrie leicht darstellen und auch lösen läßt, aber im allgemeinen Fall verwickelte Untersuchungen erfordert. Betrachten wir dazu zwei Mengen möglicher Figuren X und Y, für welche $X \sim_U Y$ gilt. Die bijektive Abbildung f, die dann definitionsgemäß die Elemente von X auf solche von Y abbildet, braucht die Beziehungen zwischen Elementen von X nicht in ähnliche Beziehungen von Elementen von Y überzuführen. Am Beispiel des (=,=)-Constraints sieht man dies sehr deutlich. Zwei mögliche Figuren können sich in X überlappen, d.h. können gemeinsame Punkte besitzen, während ihre Bilder in Y disjunkt sind. Die im Constraint enthaltene Information geht somit beim Übergang zu einer ähnlichen Menge verloren. Soll dies verhindert werden, so müssen wir, ähnlich wie für mögliche Figuren in D32-a, den Begriff der Strukturgleichheit von Mengen möglicher Figuren definieren. Bei der Geometrie genügt es, Strukturgleichheit bezüglich des (=,=)-Constraints zu fordern. Andere, scheinbar stärkere, Forderungen lassen sich hieraus ableiten. Wir sprechen in diesem Spezialfall von Überlappungstreue.

D33 Es gelte $US(\mathcal{U}, M_p^1)$, $X, Y \in Pot(M_p^1)$, $f: X \rightarrow Y$, $Bij(f)$ und $U_r \in \mathcal{U}$. Dann sagen wir, daß

<u>f X bezüglich U_r überlappungstreu auf Y abbildet</u>, wenn gilt

$\forall F, F' \in X \, \forall \lambda, \lambda' \forall a (F[\lambda, r](f(F)) \wedge F'[\lambda', r](f(F')) \wedge a \in P \cap P' \rightarrow \lambda(a) = \lambda'(a))$

Dies besagt kurz, daß die Bilder der möglichen Figuren F und F′ sich in Y genauso überlappen, wie sie es in X tun, vorausgesetzt, daß die Bilder f(F) und f(F′) auch λ- (bzw. λ'-) ähnlich vom Grad r zu F und F′ sind. Wir verstärken D30 und D31-a im Spezialfall der Geometrie zu

D34 Für $X, Y \in Pot(M_p^1)$ und $r \in \mathbb{R}$, $r \geqslant 0$ sei

a) $X \leftrightarrow_r Y \equiv \exists f(f: X \rightarrow Y \wedge Bij(f) \wedge \forall x \in X([x, f(x)] \in U_r \wedge f$ bildet X überlappungstreu bezüglich U_r auf Y ab)

b) $A_r(K_1) := \{X / X \subseteq M_{pp}^1 \wedge \exists Y \exists Z (\bar{r}(Y) = X \wedge Z \in \mathbb{M}(T_1) \wedge Z \leftrightarrow_r Y)\}$

Durch diese Zusatzforderung wird die mit $A_r(K_1)$ formulierbare empirische Behauptung verstärkt. Genauer gilt.

<u>T13</u> $A(K_1) \subseteq A_r(K_1) \subseteq A_{U_r}(K_1)$ für $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$

Beweis: Die definierenden Bedingungen für $A_r(K_1)$ entstehen durch konjunktive Hinzu= fügung der Forderung nach Überlappungstreue zu den definierenden Bedingungen von $A_{U_r}(K_1)$. Also gilt $A_r(K_1) \subseteq A_{U_r}(K_1)$. Zum Beweis von $A(K_1) \subseteq A_r(K_1)$ sei $X \in A(K_1)$, d.h. $\exists Y(\bar{r}(Y)=X \wedge Y \in \mathbb{M}(T_1))$. Wir wählen in D34 $Z:=Y$, dann gilt $Z \leftrightarrow_r Y$ trivialerweise und damit $X \in A_r(K_1)$.

Im Spezialfall r=0 können wir die ver= schmierte empirische Behauptung $I_G \in A_r(K_1)$ mit der idealen empirischen Behauptung $I_G \in A(K_1)$ identifizieren, denn es gilt

<u>T14</u> Für r=0 ist $A_r(K_1)=A(K_1)$

Beweis: Die Inklusion $\supseteq$ gilt nach T13. Zum Beweis der umgekehrten Richtung betrachten wir die Aussage $X \leftrightarrow_0 Y$. Die Figuren von X und Y haben dann zwischen ihren Punkten identische Abstände und sind auch bezüglich des (=,=)-Constraints nicht zu unterscheiden. Zwar brauchen die Figuren nicht formal identisch zu sein, weil die formale Identität von Geraden z.B. durch Gleichheit von Punkten und Ab= ständen noch nicht gewährleistet ist. Aber Figuren, die sich in Punkten und Abständen nicht unterscheiden, werden von $A(K_1)$ als gleich behandelt. Genauer: $X \leftrightarrow_0 Y \rightarrow (X \in \mathbb{M}(T_1) \rightarrow Y \in \mathbb{M}(T_1))$. Hieraus folgt die Behauptung.

Schließlich wollen wir noch eine in diesem

Zusammenhang zu lösende Aufgabe für die Zukunft stellen. Es handelt sich darum, ein Axiomensystem der Geometrie in Abhängigkeit von einem reellen Parameter zu finden, sodaß jedes M genau dann ein Modell dieser Axiome ist, wenn $M \in \mathfrak{M}_{U_r}(K_1)$ gilt. Hält man sich vor Augen, daß $\mathfrak{M}(K_1)$ die volle Geometrie enthält und daß $\mathfrak{M}_{U_r}(K_1)$ demgegenüber eine logisch schwächere Theorie ist, so sieht man, daß das gesuchte Axiomensystem eine Abschwächung eines geometrischen Axiomensystems sein müßte. Intuitiv besteht die Aufgabe darin, Axiome so zu formulieren, daß sie direkt auf ausgedehnte, konkrete Gegenstände anwendbar sind. Diese Idee ist nicht neu, sie wurde bereits von Hjelmslev (7) zu verwirklichen versucht. Es wäre interessant, eine Verbindung herzustellen zwischen einer approximativen Geometrie, wie sie durch Anwendung der beschriebenen Begriffe aus der Geometrie entsteht, und der (allerdings etwas vage formulierten) "Wirklichkeitsgeometrie" von Hjelmslev.

RAUM-ZEIT-THEORIEN

VII ZEIT

In diesem Abschnitt soll die Rekonstruktion einer Zeit-Theorie im Sinne von D6 versucht werden. Genau wie bei der Geometrie gibt es auch im Fall der Zeit viele Auffassungen und folglich viele Wege der Rekonstruktion. Wir werden eine möglichst strenge Analogie zur Geometrie wahren und können daher viele intuitive Bemerkungen aus der Geometrie übernehmen. Wir fassen uns aus drei Gründen kurz. Erstens wurde eine "empirische Zeit-Theorie" bisher kaum als eigenständige Theorie angesehen. Zweitens können wir keine befriedigende Begründung für die Theoretizität der von uns gewählten theoretischen Größe D geben. Drittens erscheinen die aufgestellten empirischen Behauptungen zwar nicht logisch-, aber doch intuitiv trivial. Vorweg läßt sich sagen, daß Punkt zwei nicht wesentlich ist. Sollte sich D als nicht-theoretisch herausstellen, so hätte dies nur zur Folge, daß M_{pp}= M_p zu setzen wäre, was ja erlaubt ist. Punkt drei legt die Frage nahe, ob unser nicht-theoretisches Vokabular nicht zu arm ist.

Trotz dieser Fragezeichen ist es für das Folgende nützlich, eine Zeit-Theorie im Sinne von D6 zur Verfügung zu haben. Wir werden diese nämlich in den nächsten Abschnitten zum Aufbau von Raum-Zeit-Theorien benutzen. Dabei wird es nicht so sehr auf die spezielle Wahl und Form der Grundbegriffe und Relationen ankommen,sondern mehr darauf,daß eine Theorie im Sinne von D6 vorliegt.Bei nachweislichen Inadäquatheiten kann die Zeit-Theorie ohne Folgen für die Raum-Zeit-Theorien modifiziert werden.

Die nicht-theoretische Sprache besteht aus dem Grundbegriff des Zeitpunktes und der Relation "später als" zwischen Zeitpunkten. Das Verständnis des Grundbegriffs bereitet gewisse Schwierigkeiten,denn sicher existiert ein Zeitpunkt nicht in der gleichen Weise wie etwa ein Partikel oder ein Punkt.Der onto= logische Status eines Zeitpunktes scheint davon abzuhängen,welche Entitäten man als erste gegebene Objekte,als "Urelemente",auf= faßt.Wenn wir von bewegten Partikeln ausgehen, die als Massenpunkte idealisiert vorgestellt werden,so lassen sich Zeitpunkte als räum= liche Relationen solcher Partikel auffassen. Wir werden diesen Weg jedoch nicht weiter ver= folgen,sondern unabhängig davon,ob ein Zu= sammenhang zwischen dem Begriff des Zeitpunktes und dem Begriff des bewegten Partikels be= steht,den formalen Kern einer Zeit-Theorie hinschreiben.Auf diese Weise vermeiden wir Diskussionen über Fragen wie etwa: "Läßt sich Zeit aus Bewegung ableiten?" oder "Kann der Begriff des Zeitpunktes nicht intuitiv,wie etwa in dem Satz "Jetzt ist er dort" ver= standen werden?".Im Hinblick auf die wissen=

schaftliche Praxis möchte man zwar sagen, daß es nicht nötig ist, den Begriff des Zeitpunktes auf andere Begriffe zurückzuführen. Andererseits ist jedoch dieser Begriff als Grundbegriff erklärungsbedürftig.

Unabhängig davon, was man unter Zeitpunkten versteht, läßt sich sagen, daß eine Zeit-Theorie sich mit einer Zeitordnung, einer zeitlichen Aufeinanderfolge von Zeitpunkten, beschäftigt. Die Aufeinanderfolge von Zeitpunkten hat die Struktur einer linearen und dichten Ordnung. Auf solchen Strukturen aufbauend, kann man als theoretische Größe eine zweistellige Zeitabstandsfunktion oder eine einstellige Zeitrepräsentationsfunktion einführen. Wir beginnen mit endlichen Strukturen.

<u>D35</u> Eine <u>mögliche Zeitordnung</u> ist ein Paar $[T^e, \prec]$ mit folgenden Eigenschaften

1) $T^e \in \mathfrak{M}$
2) T^e ist endlich
3) $\prec \subseteq T^e \times T^e$

Die Elemente von T^e heißen Zeitpunkte und werden mit t, t', t_i bezeichnet. $t \prec t'$ bedeutet, daß Zeitpunkt t vor Zeitpunkt t' liegt oder daß t' später als t liegt. Die Struktur von D35 kennzeichnet die partiellen potentiellen Modelle unserer Theorie. Demzufolge lassen sich im nicht-theoretischen Vokabular nur Aussagen über das Früher oder Später oder über die Gleichheit von Zeitpunkten machen. Solche Aussagen, so scheint es, sind nicht besonders interessant. Man überlegt sich jedoch, daß z.B. die

Voraussage einer Sonnenfinsternis als reine Aussage über die Zeit in dieser Sprache formulierbar ist.Der Zeitpunkt der Finster=nis kann etwa nach dem Zeitpunkt t des Sonnenaufgangs des x-ten Tages von heute an gerechnet liegen,vor Sonnenuntergang desselben Tages und identisch sein mit dem Zeitpunkt, zu dem eine bestimmte Uhr auf die Ziffer 12 zeigt.

<u>D36</u> Eine <u>mögliche metrisierte Zeitordnung</u> ist ein Tripel $[T^e, \prec, D]$ mit den Eigenschaften

1) $[T^e, \prec]$ ist eine mögliche Zeitordnung
2) $D: T^e \rightarrow \mathbb{R}$

In D36 wird die theoretische Größe D einge=führt.D ersetzt einfach die Zeitpunkte,die ja keine Zahlen sind,durch reelle Zahlen.Mit D läßt sich mühelos eine Zeitabstandsfunktion definieren.Umgekehrt können wir aus einer Zeit=abstandsfunktion eine repräsentierende Funktion D gewinnen,indem wir bei der Abstandsfunktion ein Argument mit der Konstanten 0 besetzen.

<u>D37</u> Eine <u>metrisierte Zeitordnung</u> ist ein Tripel $[T^e, \prec, D]$ mit den Eigenschaften

1) $[T^e, \prec, D]$ ist eine mögliche metrisierte Zeitordnung
2) $\prec$ ist eine lineare Ordnung,d.h. Für alle $t, t', t'' \in T^e$ gilt
2.1) $t \prec t' \wedge t' \prec t'' \rightarrow t \prec t''$
2.2) $\neg(t \prec t)$
2.3) $t \neq t' \rightarrow t \prec t' \vee t' \prec t$
3) $\forall t, t' \in T^e (t \prec t' \leftrightarrow D(t) < D(t'))$

Bedingung D37-3 besagt gerade,daß D die Ordnung $\prec$ in den reellen Zahlen repräsentiert. $<$ ist hierbei die gewöhnliche Kleiner= relation für reelle Zahlen.Wie in der Geo= metrie können wir den nicht-theoretischen Be= griff durch die theoretische Größe D definieren und also eliminieren.Die Gründe, weshalb wir dies nicht tun,sind die gleichen wie bei der Geometrie.Es lassen sich jedoch auch Unterschiede feststellen.Ein Unterschied besteht darin,daß bei Verstärkung der nicht-theoretischen Axiome (durch die Forderung nach Dichte und Stetigkeit von $\prec$) sich zwar die Existenz einer repräsentierenden Funktion D beweisen läßt,nicht jedoch deren Eindeutig= keit (bis auf Skalentransformation).Ohne solche Verstärkung ist die Existenz von D trivial zu beweisen -im Gegensatz zur Geometrie.Intuitiv ist eine lineare Ordnung auf einem nicht zu großen Bereich (auch mit Zusatzforderungen) immer in $\mathbb{R}$ mittels einer Funktion D repräsentierbar.Das heißt,daß die Nicht= trivialität der empirischen Behauptung nur vom (=,=)-Constraint abhängt.

<u>T15</u> Ist $[T^e,\prec,D]$ eine metrisierte Zeit= ordnung,so ist $D:T^e \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv.

Beweis: D ist injektiv per Definition genau dann,wenn gilt $\forall x,y(x\neq y \rightarrow D(x)\neq D(y))$.Es seien also $t,t' \in T^e$ gegeben mit $t\neq t'$. Nach D37-2.3 gilt dann $t\prec t' \vee t'\prec t$ und nach D37-3 folgt $D(t) < D(t') \vee D(t') < D(t)$,also $D(t)\neq D(t')$.

D37 beschreibt die Modelle unserer Zeit-

Theorie als endliche Strukturen.Weitere Idealisierungen,die die Unendlichkeit von T^e beinhalten würden,verlegen wir wie in der Geometrie in die Constraints.Analog zu D15 führen wir auch hier den Begriff der Erweiterung ein.

<u>D38</u> Es seien $Z_i = [T_i^e, \prec_i, D_i]$ mögliche metrisierte Zeitordnungen für i=1,2.

a) Z_2 heißt <u>eine Erweiterung</u> von Z_1

(in Zeichen: $Z_1 \sqsubset Z_2$) gdw

1) $T_1^e \subseteq T_2^e$

2) $\prec_1 \subseteq \prec_2$

3) $D_1 = D_2/T_1^e$ (= die Beschränkung von D_2 auf T_1^e)

b) $t \in Z_i \equiv t \in T_i^e$

c) $\prec_{Z_i} \equiv \prec_i$

Die Constraints für Dichte und Stetigkeit von $\prec$,sowie den (=,=)-Constraint definieren wir wie folgt.

<u>D39</u> Es sei $\mathcal{B}$ eine Menge von möglichen metrisierten Zeitordnungen.

a) $\mathcal{B}$ heißt <u>verträglich</u>,wenn gilt

$\forall Z, Z' \in \mathcal{B}\ \exists Z'' \in \mathcal{B}\ (Z \sqsubset Z'' \wedge Z' \sqsubset Z'')$

b) $\mathcal{B}$ heißt <u>dicht</u>,wenn gilt

$\forall Z_1 \in \mathcal{B}\ \exists Z_2 \in \mathcal{B}\ (Z_1 \sqsubset Z_2 \wedge \forall t, t' \in Z_1 (t \prec_1 t' \rightarrow \exists t'' \in Z_2 (t \prec_2 t'' \wedge t'' \prec_2 t')))$

c) $\mathcal{B}$ heißt <u>stetig</u>,wenn folgende Bedingung erfüllt ist

Es seien $<Z_i>, <U_i>, <V_i>$, i=1,2,3,... Folgen, sodaß für jedes i gilt

(1) $Z_i \in \mathcal{B}$ (2) $U_i \subseteq T_i^e, V_i \subseteq T_i^e$

(3) $Z_i \sqsubset Z_{i+1}$ (4) $U_i \subseteq U_{i+1}, V_i \subseteq V_{i+1}$

Dann gelte:

$$\forall i \in \mathbb{N}\ \forall t_i \in U_i \forall t_i' \in V_i (t_i \prec_i t_i') \rightarrow$$
$$\exists Z \in \mathcal{B}\ \forall t \in Z \forall j \in \mathbb{N} \forall t' \in U_j \setminus \{t\}\ \forall t'' \in V_j \setminus \{t\}$$
$$\exists Z_j \in \mathcal{B}\ (Z \sqsubset Z_j \wedge t,t',t'' \in Z_j \wedge t' \prec_j t \prec_j t'')$$

Die Bedeutung von a) braucht wohl nicht mehr erläutert zu werden. b) ist eine Abänderung des üblichen Axioms für die Dichte einer Ordnung,welches lautet:

$\forall t,t' \in T \exists t'' \in T (t \prec t' \rightarrow t \prec t'' \wedge t'' \prec t')$

Da diese Forderung modelltheoretisch (zumindest zusammen mit D37-2) die Existenz unendlich vieler Zeitpunkte impliziert,haben wir sie als Aussage <u>über</u> endliche metrisierte Zeitordnungen formuliert.Die Stetigkeit einer Ordnung wird durch c) ausgedrückt.Analog zur Stetigkeit in der Geometrie (D16-8) stellt sie eine Um=formulierung der folgenden Aussage dar.Sind $T_1,T_2 \subseteq T$ mit $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ und $T_1 \cup T_2 = T$ und $\forall t,t'$ $(t \in T_1 \wedge t' \in T_2 \rightarrow t \prec t')$ gegeben,so gibt es einen Zeitpunkt $t'' \in T$,sodaß $\forall t_1 \in T_1 \setminus \{t''\} \forall t_2 \in T_2 \setminus \{t''\}$ $(t_1 \prec t'' \prec t_2)$.Da dieses Axiom seine volle Stärke erst für unendliche Mengen T_1,T_2 ent=faltet,mußten wir es durch Folgen endlicher metrisierter Zeitordnungen ausdrücken.Die in=haltliche Erklärung von D16-8 kann übernommen werden,wenn man $x \prec y \prec z$ anstelle von $Z(x,y,z)$ liest und das Antezedenz,welches unmittelbar verständlich ist,ensprechend ersetzt.

Wir definieren wieder drei verschiedene Constraints.

<u>D40</u> a) $X \in C^4$ gdw X ist eine verträgliche, dichte und stetige Menge metrisierter Zeitordnungen

b) $X \in C^5$ gdw $\exists Y$(Y ist eine verträgliche, dichte und stetige Menge metrisierter Zeitordnungen und $X \subseteq Y$)

c) $X \in C^6$ gdw X ist eine verträgliche Menge metrisierter Zeitordnungen

Wie in IV läßt sich auch hier aus den Elementen $\mathfrak{X} \in C^4$ eine Struktur $[T_{\mathfrak{X}}, \prec_{\mathfrak{X}}, D_{\mathfrak{X}}]$ definieren, sodaß $[T_{\mathfrak{X}}, \prec_{\mathfrak{X}}]$ eine lineare, dichte und stetige Ordnung ist und $D_{\mathfrak{X}}$ die Bedingung von D37-3 erfüllt. Dies entspricht dem Adäquatheitssatz in IV. Es folgt, daß $\mathfrak{X}$ unendlich viele metrisierte Zeitordnungen enthalten muß mit insgesamt (überabzählbar) unendlich vielen verschiedenen Zeitpunkten.

C^5 entsteht aus C^4 durch Hinzunahme der Transitivitätsforderung. C^6 ist die schwächste Version, C^5 und C^6 können endliche Elemente enthalten. Mit diesen Constraints definieren wir drei Kerne.

<u>D41</u> Für i=4,5,6 definieren wir den <u>Kern für die Zeit Theorie Nr.i</u> $K_i = [M^i_{pp}, M^i_p, M^i, C^i]$ wie folgt

1) M^i_{pp} ist die Menge aller möglichen Zeitordnungen
2) M^i_p ist die Menge aller möglichen metrisierten Zeitordnungen

3) M^i ist die Menge der metrisierten Zeit=ordnungen
4) C^i ist wie in D40 definiert

Es fehlt nun noch die Angabe der intendierten Anwendungen I_Z,deren Bestimmung hier noch problematischer ist als bei der Geometrie. Zunächst folgt aus D41,daß die intendierten Anwendungen die logische Struktur möglicher Zeitordnungen haben.Wie schon erwähnt,wollen wir dabei offen lassen,ob die Zeitpunkte in den Anwendungen intuitiv oder als theoretische Konstrukte gegeben sind.Die $\prec$ -Relation denken wir uns operational eingeführt.Wichtige Bei=spiele für Anwendungen sind alle Arten von Zeitmeßgeräten,also alle Uhren.Weitere Bei=spiele kann man nur durch sehr starke Ab=straktion gewinnen.Betrachten wir irgendeine Vorhersage über die Zukunft,so hat diese nicht die Form einer bloßen Beschreibung eines Zeit=punktes,sondern die Form "Zum Zeitpunkt t wird das Phänomen x eintreten". Um in einer solchen Vorhersage die Anwendung einer Zeit-Theorie wiederzufinden,müssen wir von dem jeweiligen Phänomen abstrahieren.Die übrigbleibende reine Angabe eines Zeitpunktes hat dann die gewünschte Struktur,wie am Beispiel der Sonnenfinsternis bereits erläutert wurde.Damit sind auch die Beispiele schon erschöpft.Dies zusammen mit der Tatsache,daß Zeit-Theorien immer mit Aussagen über die Zukunft verbunden sind,welche nun ein=mal wesentlich unschärfer und unzuverlässiger sind als Aussagen der Geometrie,scheint uns die

Ursache für das relative Desinteresse an Zeit-Theorien im Vergleich zu Geometrien zu sein.

D42 Die Zeit-Theorien T_i (i=4,5,6) sind definiert durch
$T_i := [K_i, I_Z]$,wobei K_i und I_Z gemäß D41 und den an D41 anschließenden Ausführungen gegeben sind

Genau wie in V können wir nun die empirischen Behauptungen $I_Z \in A(K_i)$ für i=4,5,6 mitein= ander vergleichen.Wie dort werden die empirischen Behauptungen mit wachsendem Index schwächer.Ebenso können wir ohne operationale Festlegung der $\prec$-Relation in keinem der drei Fälle von der Richtigkeit der empirischen Behauptung auf die "Zeitartigkeit" der Zeit= punkte schließen.

Obwohl wir keine so überzeugenden Gründe wie in V für die Entscheidung zwischen T_4,T_5 und T_6 anbieten können,wollen wir uns für das Weitere auf T_4 beschränken.Intuitiv ist T_4 noch die am wenigsten triviale Theorie,denn sie fordert kontinuierlich viele Zeitpunkte.Diese brauchen wir in IX zur Definition der Ortsfunktion.Die Theorien T_5 und T_6 sind so schwach,daß die Betrachtungen der ersten Hälfte von IX mit ihnen nicht angestellt werden können.Dem Einwand der zu starken Idealisierung können wir wie in V durch Hinweis auf die Approximationsmethode von VI begegnen.

VIII RAUM-ZEIT-THEORIEN

Unsere Rekonstruktionen von Geometrie und Zeit-Theorien werden in diesem Abschnitt zur Definition von Raum-Zeit-Theorien verwandt. Vorweg sei betont,daß man eine Raum-Zeit-Theorie weder als Theoretisierung der Geometrie durch den Begriff der Zeit noch als Theoretisierung einer Zeit-Theorie durch den Abstandsbegriff gewinnen kann.Das heißt,es ist nicht möglich,von einer Figur ausgehend, durch Hinzunahme einer (Zeit-) Ordnungs= relation als theoretischer Größe zu einer adäquaten Raum-Zeit-Struktur zu gelangen und umgekehrt.Intuitiv bedeutet dies,daß Raum und Zeit Kategorien der gleichen Schicht sind, also auf derselben Stufe zusammen -und nicht Eine unter Voraussetzung der Anderen- einge= führt werden müssen.

Unsere Raum-Zeit-Theorien werden mit Hilfe sowohl der Geometrie als auch der Zeit-Theorie rekonstruiert.Die Kerne dieser beiden Theorien werden in der Definition von Raum-Zeit-Theorien benutzt.Insofern könnte man sagen,daß Raum-Zeit-Theorien die Geometrie und die Zeit-Theorie voraussetzen.Diese Aussage ist jedoch mit Vor= sicht zu betrachten.Voraussetzen heißt hier nur,daß gewisse Teile in der Definition von Raum-Zeit-Theorien durch isolierte Betrachtung (etwa im Rahmen der Geometrie) motiviert werden. Voraussetzen heißt hier nicht,daß eine zur Partikelmechanik führende Theorienhierarchie bei Geometrie und Zeit-Theorie anfangen müßte. Wir meinen vielmehr, daß eine Raum-Zeit-Theorie die Basis einer solchen Hierarchie bilden müßte. Bei dieser werden erstmals quantitative Raum- und Zeitbegriffe eingeführt und mit operational gegebenen Begriffen verknüpft. Jeder Teil einer Raum-Zeit-Theorie ist für sich zu schwach, um in linearer Weise einen Aufbau der Physik zu gestatten. Die Tatsache, daß Raum und Zeit auf der untersten Stufe miteinander einzuführen sind, schlägt sich auch im Formalismus nieder. Wir müssen die Abstandsfunktion mit einem dritten Argument für Zeitpunkte versehen und haben so als Grundbegriff eine dreistellige Funktion, die in zwei Argumenten den Abstand von Punkten, abhängig von der Zeit, die im dritten Argument auftritt, angibt. So sind also schon im wichtigsten Grundbegriff Raum und Zeit gleichberechtigt miteinander verknüpft.

Für die präzisere Fassung weiterer Erläuterungen werden einige Abkürzungen nützlich sein.

D43 (Abkürzungen)

Es seien P, G, E, T nicht-leere, endliche Mengen, $t \in T$ und $a, b \in P$.

1) Ist $\preccurlyeq\ \subseteq T \times (P \times (G \cup E))$, so wird $\preccurlyeq_t \subseteq P \times (G \cup E)$ definiert durch $\forall a \in P \forall x \in G \cup E (a \preccurlyeq_t x \leftrightarrow \ \preccurlyeq(t,a,x))$

2) Ist $Z \subsetneq T \times P^3$, so wird $Z_t \subsetneq P^3$ definiert durch $\forall a,b,c \in P (Z_t(a,b,c) \leftrightarrow Z(t,a,b,c))$

3) Ist $K \subseteq T \times P^4$, so wird $K_t \subseteq P^4$ definiert durch
$\forall a,b,a',b' \in P (K_t(a,b/a',b') \leftrightarrow K(t,a,b,a',b'))$

4) Für $d: P \times P \times T \to \mathbb{R}$ definieren wir

4.1) $d(\cdot,\cdot,t): P \times P \to \mathbb{R}$ durch
$d(\cdot,\cdot,t)(a',b') := d(a',b',t)$ für $a',b' \in P$

4.2) $d(a,b,\cdot): T \to \mathbb{R}$ durch
$d(a,b,\cdot)(t') := d(a,b,t')$ für $t' \in T$

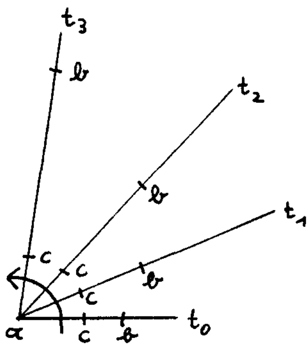
5) Für $S = [P,G,E,\leqslant,Z,K,T,\prec,d]$ bdeute

5.1) $t \in S \equiv t \in T$

5.2) $a \in S \equiv a \in P$

Um den Zweck dieser Definition zu verstehen, be=trachten wir eine Figur $[P,G,E,\leqslant,Z,K,d]$ mit nur drei Punkten a,b,c und einer Geraden α. Während es in der Geometrie nur darum ging, die räumlichen Verhältnisse zwischen diesen Objekten zu beschreiben, soll in einer Raum-Zeit-Theorie auch eine Bewegung der Objekte erfaßt werden. Stellen wir uns eine sehr ein=fache Bewegung der Figur vor. Sie möge um Punkt a gedreht werden und b möge sich dabei von a entfernen (siehe Figur 4).

Figur 4



Die Bezeichnungen $t_0,\ldots,t_3$ geben die Zeit=

punkte an,zu denen b in der skizzierten Position ist.Wir haben hier streng genommen eine Folge von vier Figuren vor uns,deren Punkte und Geraden identisch sind.Die geo=metrischen Relationen $<$ und Z sind zwar in diesem Beispiel auch für alle vier Figuren identisch,im Allgemeinen können aber diese Relationen in verschiedenen Zeitphasen verschieden sein.

Um eine derartige Figurenfolge beschreiben zu können,versehen wir die geometrischen Relationen $<$,Z,K,d mit einem Index t,der den Zeitpunkt angibt,zu welchem die Figur gerade betrachtet wird.Mengentheoretisch lassen sich solche Folgen von Relationen in eleganter Weise zusammenfassen,indem jede Relation um ein zusätzliches Argument erweitert wird.So kommen wir von der geometrischen Relation $Z \subseteq P^3$ zu der Raum-Zeit-Relation $Z \subseteq T \times P^3$ und analog für $<$,K und d.Daß wir in beiden Fällen die gleichen Buchstaben benutzen,wird keine Verwirrung stiften,aus dem Zusammenhang geht jeweils eindeutig hervor,ob nun eine geo=metrische oder eine verallgemeinerte Relation gemeint ist.Aus diesen verallgemeinerten Relationen lassen sich die geometrischen Relationen einfach dadurch zurückgewinnen,daß man das Zeitargument konstant hält.In unserem Beispiel wäre etwa die verallgemeinerte Zwischenrelation durch $\{[a,c,b,t_0],[a,c,b,t_1],[a,c,b,t_2],[a,c,b,t_3]\}$ gegeben.Für einen bestimmten Zeitpunkt,etwa t_2,erhalten wir mit D43-2 die Relation Z_{t_2} als $\{[a,c,b]\}$, welche zum Zeitpunkt t_2 genau die geometrische Zwischenrelation ist.

Der Prozeß der Rückgewinnung der geometrischen Relationen aus durch einen Zeitindex verallge= meinerten Relationen ist in D43-1 bis 4.1 be= schrieben.In 4.2 wird in ähnlicher Weise aus der verallgemeinerten Abstandsfunktion für festge= haltene Punkte a,b eine Zeitrepräsentations= funktion gewonnen.

Die partiellen potentiellen Modelle werden nun charakterisiert durch Punkte,Geraden,Ebenen und Zeitpunkte als Objekten,$\in$,Z,K als verall= gemeinerten Relationen,welche in der eben be= schriebenen Weise Folgen von partiellen Figuren beschreiben und durch eine "später als" Relation zwischen Zeitpunkten.

<u>D44</u> Eine <u>partielle potentielle Raum-Zeit-Struktur</u> ist ein Tupel $[P,G,E,\in,Z,K,T^e,\prec]$ mit den Eigenschaften

1) $P,G,E,T^e \in \mathcal{M}$ sind endlich und disjunkt
2) $\in \subseteq T^e \times P \times (G \cup E)$
3) $Z \subseteq T^e \times P^3$
4) $K \subseteq T^e \times P^4$
5) $\prec \subseteq T^e \times T^e$

Als theoretische Größe tritt zu diesen nicht-theoretischen Begriffen und Relationen eine dreistellige Funktion d. "d(a,b,t)=x" ist zu lesen als "Der Abstand der Punkte a und b zur Zeit t ist x".Der Index "e" bei T^e soll an= deuten,daß T^e im Unterschied zu einer später einzuführenden unendlichen Menge T endlich ist.

D45 Eine <u>potentielle Raum-Zeit-Struktur</u> ist ein Tupel
$S=[P,G,E,\leqslant,Z,K,T^e,\prec,d]$ mit den Eigenschaften
1) $[P,G,E,\leqslant,Z,K,T^e,\prec]$ ist eine partielle potentielle Raum-Zeit-Struktur
2) $d:P\times P\times T^e\rightarrow\mathbb{R}$

Eine potentielle Raum-Zeit-Struktur enthält alle nicht-theoretischen Größen der Geometrie (allerdings in verallgemeinerter Form) und der Zeit-Theorie.Zu diesen tritt nun eine einzige theoretische Größe d hinzu,welche die beiden Funktionen d und D aus Geometrie und Zeit-Theorie zu einer einzigen Funktion verknüpft.Da die geometrischen Relationen in verallgemeinerter Form vorliegen,kann man nicht sagen,eine potentielle Raum-Zeit-Struktur sei ein Tripel $[F,Z,d]$,wobei F eine partielle mögliche Figur, Z eine mögliche Zeitordnung und $d:pr_1(F)^2\times pr_1(Z)\rightarrow\mathbb{R}$ sei.Wir können aber umgekehrt,ausgehend von einer potentiellen Raum-Zeit-Struktur,die darin vereinigten partiellen möglichen Figuren und möglichen Zeitordnungen gewinnen.Es läßt sich sogar aus der dreistelligen Funktion d die zweistellige Abstandsfunktion und (mit Einschränkungen) die einstellige Zeitrepäsentationsfunktion D erhalten.Auf diese Weise bekommen wir aus einer potentiellen Raum-Zeit-Struktur nicht nur partielle mögliche Figuren und mögliche Zeitordnungen,sondern sogar mögliche Figuren und mögliche metrisierte Zeitordnungen.Dies wird genauer in der folgenden Definition aufgeschrieben.

D46 Es sei $S=[P,G,E,\lessdot,Z,K,T^e,\prec,d]$ eine potentielle Raum-Zeit-Struktur,$t\in T^e$ und $a,b\in P$.

a) $S_t:=[P,G,E,\lessdot_t,Z_t,K_t,d(\cdot,\cdot,t)]$ heißt der t-Schnitt von S

b) $S_{a,b}:=[T^e,\prec,d(a,b,\cdot)]$ heißt der ab-Schnitt von S

Offenbar ist S_t eine mögliche Figur und $S_{a,b}$ eine mögliche metrisierte Zeitordnung.

Mit diesen Begriffen lassen sich Modelle, also Raum-Zeit-Strukturen,wie folgt charakterisieren.

D47 S ist eine Raum-Zeit-Struktur gdw

1) S ist eine potentielle Raum-Zeit-Struktur
2) Für alle $t\in S$ ist S_t eine Figur
3) Es gibt $a,b\in S$,sodaß $S_{a,b}$ eine metrisierte Zeitordnung ist

Hier treten nun Axiome aus Geometrie und Zeit-Theorie explizit in Erscheinung.Intuitiv ist eine Raum-Zeit-Struktur eine endliche Folge von Figuren $F_{t_1},\ldots,F_{t_n}$,wobei alle Figuren die gleichen Objekte enthalten.Darüberhinaus bilden die Zeitindizes dieser Figuren eine lineare Ordnung,welche durch den Abstand zweier Punkte a,b in den reellen Zahlen repräsentiert wird.

Aus D47-3 folgt,daß die Punkte a und b sich tatsächlich gegeneinander bewegen und zwar sich stets weiter voneinander entfernen.Denn zu immer späteren Zeitpunkten muß,damit $S_{a,b}$ eine metrisierte Zeitordnung ist,d(a,b,·) einen immer größeren Wert annehmen.

Natürlich kann man sagen,daß auch zwei un= bewegte Punkte a,b ein Modell von D47-3 bilden können,indem die Maßstäbe im Laufe der Zeit immer kürzer werden,also schrumpfen.Aber wir haben schon mehrmals betont,daß ein operatives Verständnis der nicht-theoretischen Begriffe vorausgesetzt werden muß,damit die Theorie die intendierten Gegenstände beschreibt.Im Fall der Maßstäbe bedeutet dies,daß die Kongruenzrelation als operational "definiert" bereits vorausgesetzt wird.Diese Relation ist durch das Aneinanderlegen von Punktepaaren (also einer Art von Maßstäben) gegeben.Selbst wenn unsere Welt so beschaffen wäre,daß in irgendeinem Sinn die Maßstäbe im Laufe der Zeit "wirklich" kürzer würden,hätte dies auf die Rekonstruktion der Raum-Zeit-Theorie keinen Einfluß,solange Kongruenzen erhalten bleiben.Trotz der "in Wirklichkeit" schrumpfenden Länge eines Maßstabes würden wir sagen,seine Länge bleibe konstant,wenn wir ihn immer wieder mit einer großen Klasse von anderen Maßstäben verglichen hätten und Kongruenz festgestellt hätten.Es liegt hier ein typischer Einwand vor,dessen Sinnlosigkeit man bei genauer Betrachtung der Situation sofort ein=

sieht.

Die Bedingung D47-3 wird in manchen Fällen nicht erfüllt sein, man kann sich durchaus Raum-Zeit-Strukturen vorstellen, bei denen alle Punkte zyklische Bewegungen gegeneinander ausführen. In einem derartigen System gibt es keine zwei Punkte, die sich immer weiter voneinander entfernen. Wir geben durchaus zu, daß es andere Möglichkeiten gibt, eine stattfindende Bewegung auszudrücken. Unsere Lösung hat den Vorteil, im Hinblick auf die Rekonstruktion der Zeit-Theorien die einfachste Lösung zu sein. Eine sicherlich ebenfalls akzeptable Möglichkeit wäre, in VII auf die Zeitrepräsentationsfunktion D ganz zu verzichten und statt D47-3 nur zu fordern, daß für zwei Punkte a,b: $d(a,b,t) \neq d(a,b,t')$ für alle $t \neq t' \in T^e$. Wir bleiben bei unserer Formulierung, insbesondere weil sie ein klärendes Licht auf die Natur von Uhren wirft, worauf wir noch näher eingehen werden.

Analog zu früheren Fällen definieren wir den Begriff der Erweiterung für Raum-Zeit-Strukturen.

<u>D48</u> Es seien S,S′ Raum-Zeit-Strukturen. Dann heißt S′ <u>eine Erweiterung</u> von S (in Zeichen: $S \sqsubset S'$), wenn gilt

1) $T^e \subseteq (T^e)'$
2) $\forall t \in T^e (S_t \sqsubset S'_t)$
3) $\forall a,b \in P (S_{a,b} \sqsubset S'_{a,b})$

Genau wie wir die Modelle der Raum-Zeit-Theorie durch Modelle der Geometrie und der Zeit-

Theorie definierten, können wir auch die Constraints der ersten Theorie durch die Constraints der letzten Theorien ausdrücken.

D49 Es sei $\mathfrak{A}$ eine Menge von Raum-Zeit-Strukturen.

a) $\mathfrak{A} \in C_1$ gdw $\forall S \in \mathfrak{A}\ \forall t \in S(\{Y/\exists S' \in \mathfrak{A}\ (Y=S'_t)\}$ ist verträglich und abgeschlossen)

b) $\mathfrak{A} \in C_2$ gdw $\exists S \in \mathfrak{A} \exists a,b \in S(\{Y/\exists S' \in \mathfrak{A}\ (Y=S'_{a,b})\}$ ist verträglich, dicht und stetig)

c) $\mathfrak{A} \in C_3$ gdw $\forall S,S' \in \mathfrak{A}\ S'' \in \mathfrak{A}\ (S \sqsubset S'' \wedge S' \sqsubset S'')$

D49-a besagt intuitiv, daß, wenn t irgendein Zeitpunkt einer in $\mathfrak{A}$ vorkommenden Struktur S ist, die Menge aller t-Schnitte von Strukturen $S' \in \mathfrak{A}$ den Geometrie-Constraint erfüllt. Wir betrachten also eine Menge von Raum-Zeit-Strukturen und machen zu einer bestimmten Zeit t eine "Momentaufnahme". Diese Momentaufnahme liefert für jede Struktur eine Figur. Es wird nun gefordert, daß alle so zu einem bestimmten Zeitpunkt erhaltenen Figuren eine Geometrie bilden. Die beiden Quantoren $\forall S \in \mathfrak{A} \forall t \in S$ drücken lediglich aus, daß t irgendein beliebiger Zeitpunkt einer in $\mathfrak{A}$ vorkommenden Struktur ist.

Die analoge Forderung in b) würde lauten: Für alle Paare [a,b] von Punkten in Strukturen von $\mathfrak{A}$ erfüllt die Menge aller ab-Schnitte von Strukturen in $\mathfrak{A}$ den Zeit-Constraint C^4. Diese Forderung wäre unsinnig, denn dann müßten sich

alle Punkte gleichförmig voneinander ent=
fernen.In D49-b fordern wir dies jedoch nur
für mindestens zwei Punkte.Man beachte:
Aus $\mathfrak{A} \in C_2$ folgt nicht,daß die Menge aller
Zeitpunkte von Strukturen in $\mathfrak{A}$ unbeschränkt
ist.Es kann durchaus Zeitpunkte t_o und t_1
geben,sodaß für jeden Zeitpunkt t einer
Struktur in $\mathfrak{A}$ gilt: $t_o \prec' t \prec' t_1$,wobei die
$\prec'$-Relation in einer geeigneten Struktur
S'vorliegt.

Aus $\mathfrak{A} \in C_1 \cap C_2$ folgt auch nicht,daß $\mathfrak{A}$
verträglich ist.Dies wird in D49-c eigens
gefordert.Zusammenfassung der bisherigen
Definitionen liefert.

<u>D50</u> Der Kern K_7 der Raum-Zeit-Theorie wird
wie folgt definiert

$K_7 := [M^7_{pp}, M^7_p, M^7, C^7]$,wobei

1) M^7_{pp} ist die Menge aller partiellen potentiellen Raum-Zeit-Strukturen
2) M^7_p ist die Menge aller potentiellen Raum-Zeit-Strukturen
3) M^7 ist die Menge aller Raum-Zeit-Strukturen
4) $C^7 := C_1 \cap C_2 \cap C_3$

Zur Raum-Zeit-Theorie T_7 fehlt nun nur noch
die Menge der intendierten Anwendungen I_{RZ}.
Eine intendierte Anwendung muß die logische
Form einer partiellen potentiellen Raum-Zeit-
Struktur haben.Diese Strukturen sind vorzu=
stellen als Folge von Momentaufnahmen sich

bewegender Partikel.Es ist hier deutlich ein Schnitt zwischen der intendierten Inter= pretation unseres Grundbegriffs "Punkt" in der Geometrie und in Raum-Zeit-Theorien fest= zustellen.Hatten wir es in der Geometrie mit ausdehnungslosen,"ruhenden" geometrischen Punkten zu tun,so ist die Interpretation nun eine ganz Andere.Der Begriff des Punktes be= zeichnet in Raum-Zeit-Theorien bewegte Gegen= stände,die in idealisierter Form auch als Partikel und später als Massenpunkte be= zeichnet werden.Natürlich gewinnt der Begriff des Massenpunktes erst in der Mechanik seine volle Bedeutung,aber die Raum-Zeit-Theorie soll ja die Grundlage sein,auf der die Mechanik aufbaut.So müssen wir also bereits hier den Begriff des Punktes richtig inter= pretieren.Von der Mechanik her lassen sich einige Bemerkungen machen,die uns helfen,die intendierten Anwendungen zu beschreiben.

In einem Physik-Lehrbuch (11) finden wir auf Seite 1 die folgende Aussage.Unter einem Partikel oder Massenpunkt "versteht man einen Körper,dessen Ausmaße man bei der Beschreibung seiner Bewegung vernachlässigen kann.Natürlich hängt die Möglichkeit einer solchen Vernach= lässigung von den konkreten Bedingungen der Aufgabe ab". Wie der zweite Satz des Zitats zeigt,liegt in der "Vernachlässigbarkeit" eine so große Vagheit,daß man zu einer Ent= scheidung nur auf Beispiele verweisen kann. Tatsächlich wird auch in (11) direkt nach dem

Zitat auf das Beispiel des Planetensystems verwiesen,wodurch die Methode der para= digmatischen Beschreibung der Anwendungen aufs Schönste bestätigt wird.

Wir meinen aber,daß gerade beim Partikel allgemeinere Aussagen möglich sind.Zunächst einmal ist ein Partikel ein Ding oder Körper und besitzt eine Ausdehnung.Gerade von dieser Ausdehnung wird in der Mechanik ab= strahiert.Dadurch ist aber noch nicht jeder Körper ein Massenpunkt,also ein Gegenstand der Mechanik.Vielmehr interessiert sich diese nur für feste Körper (im Gegensatz zu flüssigen oder gasförmigen Gebilden) und auch nur für solche,die sich bewegen oder zumindest sich unter anderen Umständen bewegen könnten. Letztere Möglichkeit birgt die Gefahr allzu großer Unklarheit,weshalb wir sie (vielleicht etwas willkürlich) ausschließen.Man kann jedoch sagen,daß solche Systeme,in denen sich gar nichts bewegt,kein genuiner Gegenstand der Partikelmechanik sind.Sie tauchen höchstens als Grenzfälle in theoretischen Betrachtungen auf.Wir erhalten insgesamt die Charakterisierung von Partikeln als feste Körper,die sich gegen= einander bewegen.Eine weitere Einschränkung liegt nahe: Die Einschränkung auf solche Körper, die sich nicht berühren.Dies würde aber nicht die Physik widerspiegeln,wo Reibungsphänomene in der Partikelmechanik abgehandelt werden. Damit haben wir eine intendierte Interpretation von "Punkt" in der vor-theoretischen Sprache angegeben. Zum Zweck der leichteren Handhabung der Theorie abstrahiert man von der Aus=dehnung. Die so entstehenden Abstrakta sind die Gegenstände, mit denen sich die Theorie beschäftigt.

Die weiteren Grundbegriffe: Geraden, Ebenen und Zeitpunkte werden in der bisherigen Intention weiter vorgestellt, natürlich mit der Einschränkung, die die Uminterpretation der Punkte bewirkt.

Auch die nicht-theoretischen Relationen behalten ihre bisherige Bedeutung. Wir könnten nun versuchen, Beispiele für Raum-Zeit-Strukturen anzugeben. Aber die Raum-Zeit-Theorie erhebt einen so universellen Gültigkeitsanspruch, daß alle Bereiche der Wirklichkeit, in denen sich so etwas wie Partikel und deren Bewegung fest=stellen lassen, intendierte Anwendungen der Theorie sind. Natürlich ist diese Bestimmung etwas vage, aber durch Angabe einiger Beispiele wird sie nicht viel klarer. Zunächst sind alle intendierten Anwendungen der Partikelmechanik auch solche der Raum-Zeit-Theorie. Darüberhinaus aber auch solche Phänomene wie z.B. ein Riesenrad (Mechanik der starren Körper) oder ein bremsendes Auto (Reibungskräfte).

Nach diesen Bemerkungen über I_{RZ} stellen wir fest.

<u>D51</u> Die <u>Raum-Zeit-Theorie T_7</u> wird definiert durch $T_7 := [K_7, I_{RZ}]$

Wir nennen die Theorie T_7 auch <u>diskrete</u> Raum-Zeit-Theorie, um hervorzuheben, daß wir es mit endlich vielen,diskreten Objekten in einer Anwendung zu tun haben.Bevor wir den Schritt von T_7 zur Partikelkinematik angehen,ist es nötig,einige Zusätze zu T_7 zu besprechen,die alle wichtig sind und zum Teil auch später gebraucht werden.

Unser erstes Problem im Zusammenhang mit T_7 lautet: Wie kann man erreichen,daß der Raum seine Struktur im Laufe der Zeit nicht ändert? Man könnte zunächst naiv fragen, wodurch garantiert sei,daß die Abstandsfunktion $d(\cdot,\cdot,t)$ zu verschiedenen Zeiten "dieselbe" sei.Man wäre versucht zu fordern,daß $d(\cdot,\cdot,t)$ und $d(\cdot,\cdot,t')$ die gleiche mathematische Form haben.Diese Forderung ist aber unsinnig. Wenn sich die Partikel bewegen,so wird eben gerade der Abstand zu zwei verschiedenen Zeit=punkten verschieden sein.Da die Partikel=mengen keine geeignete mathematische Struktur besitzen,können die verschiedenen Abstands=funktionen $d(\cdot,\cdot,t)$ und $d(\cdot,\cdot,t')$ keine ge=meinsame analytische Form haben.Es könnte also sein,daß $d(a,b,t)=2$ und $d(a,b,t+e)=1000$,was für kleines e bedeuten würde,daß die Punkte a und b "auseinander gesprungen" sind.Eine solche Mißinterpretation des Formalismus ist immer möglich und kann nur durch Bezug auf operationale Meßmethoden verhindert werden. Aber selbst wenn wir derartige Interpretationen ausschalten,bei denen der "Raum" sich gummi=artig verformt,ausdehnt oder sich zusammen=zieht,bleibt noch eine Unbestimmtheit,die in der Wahl der Maßeinheit liegt. Bei einer Geometrie ist die Metrik ja nur bis auf einen konstanten reellen Faktor eindeutig bestimmt. Dieser Faktor kann willkürlich gewählt werden. Die Forderung, daß er zu verschiedenen Zeiten derselbe ist, läßt sich formal ausdrücken. Intuitiv fordert man, daß in einer Raum-Zeit-Struktur zwei Punkte existieren, die zu allen Zeitpunkten in der Struktur den gleichen Abstand haben (D52-a). Wird die Aussage, daß die Abstände gleich sind, mit der üblichen Methode unter Benutzung der Kongruenzrelation überprüft, so müssen die Maßstäbe zu allen Zeitpunkten gleich lang sein. Wir sagen dann, daß die Metrik in der Struktur starr sei. Dieser Begriff läßt sich auch auf Mengen von Raum-Zeit-Strukturen ausdehnen (D52-b). Eine noch überzeugendere Formulierung der Forderung nach einer starren Metrik bietet sich an bei Benutzung der Kongruenzrelation. Während in D52-a nur Bezug auf zwei Punkte genommen wird, werden in D52-c alle Punktepaare [a′, b′], die dem gegebenen Paar [a, b] kongruent sind, zur Überprüfung herangezogen. Das heißt, nicht nur die Länge <u>eines</u> Maßstabes bleibt zeitlich konstant, sondern auch die Länge aller anderen dazu kongruenten Maßstäbe. Der Übergang von D52-a zu D52-c stellt einen interessanten Fall einer formal ausdrückbaren Einfachheitsüberlegung dar. Man nöchte diejenigen Gegenstände als Maßstäbe benutzen, die zu einer möglichst großen Klasse von Gegenständen "starr" sind.

In D52-a wird nur gefordert,daß ein Maß=
stab starr bleibt,in D52-c dagegen wird eine ganze Klasse von Maßstäben benutzt,die äquivalent bezüglich ihrer Starrheit sind.

D52 Es sei X eine Menge von Raum-Zeit-Strukturen und $S \in X$.

a) S hat eine starre$_1$ Metrik gdw

$$\exists a,b \in S(a \neq b \wedge \forall t,t' \in S(d(a,b,t)=d(a,b,t')))$$

b) X hat eine starre$_1$ Metrik gdw

$$\exists S' \in X \exists a,b \in S'(a \neq b \wedge \forall S \in X \forall t,t' \in S (a,b \in S \rightarrow d(a,b,t)=d(a,b,t')))$$

c) S hat eine starre$_2$ Metrik gdw

$$\exists a,b \in S(a \neq b \wedge \forall t,t' \in S \forall a',b' \in S (K_t(a,b/a',b') \leftrightarrow K_{t'}(a,b/a',b')))$$

d) X hat eine starre$_2$ Metrik gdw

$$\exists S' \in X \exists a,b \in S'(a \neq b \wedge \forall S \in X \forall t,t',a',b' \in S (a,b \in S \rightarrow (K_t(a,b/a',b') \leftrightarrow K_{t'}(a,b/a',b'))))$$

e) Die Raum-Zeit-Theorie T_7 hat eine starre Metrik gdw
$\forall X \in C^7$(X hat eine starre$_2$ Metrik)

In D52-a wird gefordert,daß ein Punktepaar (also ein Maßstab) zu allen Zeiten in S den gleichen Abstand (also die gleiche Länge) hat. D52-b verlangt,daß es in irgend einer Struktur S' von X zwei Punkte a,b gibt,die zu jeder Zeit und in jeder Struktur S,in der a und b vorkommen,den gleichen Abstand haben.Daß nur solche S betrachtet werden,in denen a und b vorkommen,liegt daran,daß a und b nicht in allen Strukturen von X liegen müssen.Man möchte vermuten,daß es in X Strukturen mit Zeitpunkten t gibt,welche in keiner Struktur von X,die a und b enthält,vorkommen.Zu einem solchen Zeitpunkt t könnte dann die Metrik "wild" sein,denn wir können sie mit a und b nicht überprüfen.Dieser Einwand ist richtig, wird jedoch durch D52-e ausgeräumt.Dort wird der Begriff der starren Metrik nur auf Constraint-Mengen $X \in C^7$ angewandt.Da eine solche Menge X auch C_2 erfüllt (siehe D48-b), gibt es zu jedem Punktepaar [a,b] und zu jedem Zeitpunkt t eine Struktur S,sodaß t im ab-Schnitt von S liegt.Das heißt: Jedes Punktepaar kommt zu jedem Zeitpunkt in irgeneiner Struktur vor. D52-b in Konjunktion mit D48-b gewährleistet also,daß der Abstandsvergleich zu allen Zeit= punkten stattfindet.

Nach D52-c gibt es Punkte a,b,die zu jeder Zeit in S mit jedem Paar [a',b'] kongruent sind, mit dem sie es zu einer anderen Zeit waren. D52-d überträgt diese Forderung auf X.Auch hier werden,wie in D52-b,nur solche Strukturen S betrachtet,in denen a und b vorkommen.Der obige Einwand wird auch hier auf die gleiche Weise ausgeräumt.

Durch Hinzunahme der Forderung einer starren Metrik zum Constraint erhalten wir eine ver= stärkte Raum-Zeit-Theorie (D52-e).Wir wählen dazu die Formulierung von D52-d,weil diese intuitiv am Stärksten erscheint.Logisch ge= sehen sind D52-b und D52-d nicht vergleichbar.

Der nächste Zusatz zu T_7 betrifft die Zeit=messung. Wir haben in D47-3 gefordert, daß es zwei Punkte gibt, die sich voneinander weg be=wegen. Damit ist gewährleistet, daß tatsächlich irgendeine Bewegung stattfindet. Es wird aber schwerfallen, durch derartige Bewegungen eine Zeitmeßmethode zu definieren. Üblicherweise wählt man zur Zeitmessung periodische Be=wegungen, jede Uhr ist hierfür ein Beispiel. Ohne auf die Probleme eingehen zu wollen, die mit dem Begriff der Periodizität verbunden sind, sei kurz beschrieben, wie man eine periodische Bewegung als Raum-Zeit-Struktur einer bestimmten Art charakterisieren kann. Wir brauchen hierzu den folgenden Satz.

<u>T16</u> Es sei $S=[P,G,E,\leqslant,Z,K,T^e,\prec,d]$ eine Raum-Zeit-Struktur.

a) $\exists! t \in T^e \forall t' \in T^e (t' \neq t \rightarrow t' \prec t)$

b) $\forall t \in T^e (\neg \forall t' \in T^e (t' \neq t \rightarrow t' \prec t) \rightarrow \exists! t'' \in T^e (t \prec t'' \wedge \neg \exists t_1 \in T^e (t \prec t_1 \prec t'')))$

c) $\exists! t \in T^e \forall t' \in T^e (t' \neq t \rightarrow t \prec t')$

Beweis: Es werden geläufige mathematische Schlußweisen verwandt. a) beweist man durch Induktion nach der Anzahl n der Elemente von T^e. Für n=1 ist die Behauptung richtig. Hat T^e n+1 Elemente, so nimmt man ein t von T^e weg. Nach Induktionsvoraussetzung findet man in der n-elementigen Menge $T^e \setminus \{t\}$ ein Element t' mit der gewünschten Eigenschaft. Ist $t' \prec t$, so erfüllt t die Behauptung, andernfalls ist t' das gesuchte Element. Der Beweis von b) ver=läuft wie folgt. Es sei $t \in T^e$ gegeben. Nach

Voraussetzung gibt es ein $t'\in T^e$, sodaß $t \prec t'$. Den Rest der Behauptung beweist man durch Induktion nach der Zahl n der Elemente "zwischen" t und t', d.h. der Elemente t_2 mit $t \prec t_2 \prec t'$. Für n=0 ist nichts zu zeigen. Liegen n+1 Elemente zwischen t und t', so betrachten wir ein beliebiges Element t_1 unter diesen. Hat t_1 die gewünschte Eigenschaft, so sind wir fertig. Andernfalls gibt es unter den n ver= bleibenden Elementen nach Induktionsvoraussetzung eines, t_3, welches die Behauptung für n erfüllt. Man prüft nun, ob $t_1 \prec t_3$, in welchem Fall t_1 das gesuchte Element ist, oder $t_3 \prec t_1$, in welchem Fall die Behauptung mit t_3 erfüllt ist. c) be= weist man wie a).

D53 Es sei $S=[P,G,E,<,Z,K,T^e,\prec,d]$ eine Raum-Zeit-Struktur.

a) Das nach T16-a eindeutig bestimmte t mit $\forall t'\in T^e(t'\neq t \rightarrow t'\prec t)$ bezeichnen wir mit $\max(T^e)$
Analog das t von T16-c mit $\min(T^e)$

b) Es sei $t\in T^e, t\neq \max(T^e)$. Das nach T16-b eindeutig bestimmte t'' bezeichnen wir mit N(t)

c) Gilt für $t\in T^e$: $N(t)=\max(T^e)$, so be= zeichnen wir t mit $\max(T^e)-1$

d) S heißt eine Uhr, wenn gilt
$$\exists a,b(a\neq b \wedge a,b\in P \wedge \forall t\in T^e\setminus\{\max(T^e)\}(d(a,b,t)+1=d(a,b,N(t))) \wedge \forall t'\in T^e\setminus \{\max(T^e),\max(T^e)-1\} (d(a,b,t)=d(a,b,N(N(t)))))$$

Nach D53-d ist eine Uhr nichts anderes als eine Raum-Zeit-Struktur mit zwei Punkten a,b, die sich in folgender Weise bewegen.Zu einem Zeitpunkt t,zu dem es in T^e noch einen späteren Zeitpunkt N(t) gibt,beträgt der Ab=stand zwischen a und b: d(a,b,t).Zum nächst=folgenden Zeitpunkt N(t) hat sich der Abstand um eine Einheit vergrößert,also d(a,b,N(t))= d(a,b,t)+1.Wenn N(t) nicht der letzte Zeit=punkt in T^e ist,also wenn N(N(t)) existiert, so soll der Abstand zu diesen Zeitpunkt wieder so groß sein wie zur Zeit t,also d(a,b,N(N(t)))=d(a,b,t).Die Partikel a und b führen also ständig eine drei aufeinander folgende Zeitpunkte umfassende periodische Bewegung durch.

Als anschauliches Modell für D53-d kann eine Pendeluhr dienen.Als Punkt a markieren wir die höchste Stelle,an der sich das Pendel beim Ausschlagen nach links befindet.Als Punkt b wählen wir das Pendel selbst.Wir beginnen die Beobachtung zur Zeit t,in der sich das Pendel im Punkt a befindet,also d(a,b,t)=0.Als nächsten Zeitpunkt N(t) wählen wir den Zeit=punkt,in dem das Pendel nach rechts aus=schlagend auf dem höchsten Punkt ist.Wir setzen d(a,b,N(t))=1.Als nächsten Zeitpunkt N(N(t)) wählen wir denjenigen Zeitpunkt,an dem das Pendel wieder die maximale Auslenkung nach links hat.Es gilt dann d(a,b,N(N(t)))=0=d(a,b,t). Dieser Zyklus wiederholt sich ständig und liefert ein Modell von D53-d.

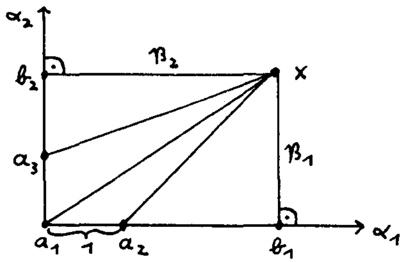
Es ist eine empirische Tatsache,daß,eine wohlverstandene Längenmeßmethode vorausgesetzt, Modelle von Uhren existieren. Es gibt sogar ziemlich viel verschiedene Uhren. Die folgende Forderung schränkt also die Raum-Zeit-Theorie in einem durchaus vernünftigen Ausmaß ein.

<u>D54</u> Die Theorie T_7 <u>hat eine Standarduhr</u>, wenn es unter den Modellen von T_7 eine Uhr gibt

Die dritte Ergänzung von T_7 ist die Einführung von Koordinaten. Kennt man bei einer Menge von Partikeln alle Abstände, so kann man mit Hilfe geometrischer Sätze den Abstand eines Punktes x zu einem anderen Punkt y berechnen, indem man nur die Abstände von x und y zu vier nicht-co-planaren Punkten $a_1,..,a_4$ benutzt. Alle Informationen über Abstände lassen sich also zurückführen auf Informationen über Abstände zu vier fest gewählten Partikeln. Eine bestimmte Konfiguration, die durch Abstände von Partikeln gegeben ist, kann man daher gleichwertig beschreiben, indem man nur einen Teil der bekannten Abstände benutzt. Je mehr Partikel ein System enthält, desto deutlicher wird die Differenz zwischen der Zahl aller Abstände und der Zahl der Abstände jedes Punktes zu den vier ausgezeichneten Punkten.

Der Übergang von einer Beschreibung durch Angabe der gesamten Metrik zu einer Beschreibung durch Angabe einer Teilmenge von Werten der Metrik bezüglich ausgezeichneter Punkte stellt somit eine Vereinfachung dar. Die vier ausgezeichneten Punkte nennen wir ein Koordinatensystem,denn mit ihrer Hilfe läßt sich ein Koordinatensystem definieren. Als technisch einfachste Form eines Koordinaten= systems erwies sich das rechtwinklige, kartesische Koordinatensystem.Zur Beschreibung der Konfiguration gibt man in einem kartesischen Koordinatensystem die Abstände derjenigen Punkte b_i zum Koordinatenursprung an,welche Schnittpunkte der Lote von Punkten x auf die Koordinatenachsen α_i sind (siehe die zweidimensionale Figur 5).Die Punkte b_i sind für verschiedene Konfigurationen ver= schieden.Bei dieser Darstellung genügt es also nicht,wie oben gesagt,den Abstand der Punkte x zu vier <u>fixierten</u> Punkten anzugeben.Vielmehr muß man zu jedem Punkt x die folgende Kon= struktion durchführen.

Figur 5



Man fällt von x die Lote β_i auf die Koordinatenachsen α_i.Der Abstand $d(a_1,b_i)$, (i=1,2,3) läßt sich dann unter der Voraus= setzung,daß $d(a_1,x)$ und $d(a_{i+1},x)$ gegeben sind und $d(a_1,a_{i+1})=1$ ist,wie folgt berechnen. Aus $d(x,b_i)^2+d(a_{i+1},b_i)^2=d(a_{i+1},x)^2$ isoliert man $d(x,b_i)$ und setzt in $(d(a_{i+1},b_i)+1)^2+d(x,b_i)^2=d(a_1,x)^2$ ein. Hieraus erhält man $d(a_{i+1},b_i)$ und damit das Gewünschte. Wenn wir also als ausgezeichnete Punkte den Koordinaten=ursprung a_1 und die Spitzen der Einheits=vektoren der Länge 1 entlang der Koordinaten=achsen wählen, so lassen sich aus der oben erwähnten Menge der Abstände aller Punkte zu diesen vorgegebenen Punkten auch die kartesischen Koordinaten berechnen.

Umgekehrt lassen sich auch aus den kartesischen Koordinaten alle Abstände mit Hilfe der bekannten Formel $d(x,y)=(\sum_{i=1}^{3}|d(x,b_i)-d(y,c_i)|^2)$ berechnen, wobei b_i und c_i die jeweiligen Fußpunkte der Lote sind. Insgesamt halten wir fest: Die Methoden der Beschreibung durch Angabe der vollen Metrik, durch Angabe der Abstände zu vier nicht-co-planaren Punkten oder durch An=gabe der kartesischen Koordinaten sind äquivalent.

Das Koordinatensystem in Figur 5 ist durch Angabe der Punkte $a_1,..,a_4$ eindeutig bestimmt, denn durch diese Punkte sind die Koordinaten=achsen eindeutig festgelegt. Wir wollen nun genau aufschreiben, wann Punkte $a_1,..,a_4$ in einer Raum-Zeit-Struktur ein Koordinatensystem konstituieren können.

<u>D55</u> Es sei S eine Raum-Zeit-Struktur und $a_1,..,a_4 \in P$.

a) $\{a_1,..,a_4\}$ heißt <u>ein Koordinatensystem</u> für S, wenn gilt

1) $\forall t \in T^e(\neg \mathrm{copl}_t(a_1,..,a_4)$ in $S_t)$

2) $\forall x,y \in \{a_1,..,a_4\}\ \forall t,t' \in T^e(\ d(x,y,t)= d(x,y,t'))$

3) $\forall i,j \in \{2,3,4\}\ \forall t \in T^e(i \neq j \rightarrow d(a_i,a_j,t)^2= d(a_1,a_i,t)^2+d(a_1,a_j,t)^2)$

4) $\forall i\ \forall t \in T^e(1 < i \leqslant 4 \rightarrow d(a_1,a_i,t)=1)$

b) S heißt Raum-Zeit-Struktur <u>mit Koordinaten=system</u>, wenn es $a_1,..,a_4 \in P$ gibt, sodaß $\{a_1,..,a_4\}$ ein Koordinatensystem für S ist

c) Die Theorie T_7 <u>hat ein Koordinatensystem</u>, wenn es unter den Modellen von T_7 eine Raum-Zeit-Struktur mit Koordinatensystem gibt

In D55 wird Folgendes gefordert. Nach a1) dürfen die Punkte $a_1,..,a_4$ im t-Schnitt S_t von S nicht in einer Ebene liegen. Nach a2) müssen sie zu allen Zeitpunkten den gleichen Abstand haben. Sie sind also relativ unbewegt zueinander. Nach a3) müssen je drei Punkte aus der Menge $\{a_1,..,a_4\}$ den Satz des Pythagoras erfüllen, wobei der rechte Winkel beim Koordinatenur=sprung a_1 liegt. Da der Satz des Pythagoras genau dann gilt, wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, können wir ihn zur Charakterisierung von rechten Winkeln benutzen. Dies ist auch genau der Zweck von a3). Es soll erreicht werden, daß die durch a_1 und a_i (i=2,3,4) bestimmten Koordinatenachsen sich alle im rechten Winkel schneiden. a4) schließlich legt fest, daß die

Punkte a_i (i=2,3,4) eine Längeneinheit von a_1 entfernt sind.D55-b und c bedürfen keiner Erläuterung.

Wenn wir uns in einem Modell der vollen Geometrie befinden und vier Punkte mit den gegebenen Eigenschaften haben,so bilden die durch a_1 und a_i (i=2,3,4) gehenden Geraden ein rechtwinkliges,kartesisches Koordinaten=system.In diesem Fall folgt Bestimmung al) aus a3) und a4).Dasselbe gilt für den Fall, daß $I_{RZ} \in A(K_7)$,denn dann bildet ja die Menge aller t-Schnitte zu jedem Zeitpunkt t eine Geometrie.Da wir die Richtigkeit der empirischen Behauptung jedoch nicht voraussetzen wollen, müssen wir in unseren (endlichen) Raum-Zeit-Strukturen auch al) fordern.

Es genügt,daß,wie in D55-c gefordert,ein Modell der Theorie eine Raum-Zeit-Struktur mit Koordinatensystem ist.Jedes andere Modell S kann man dann wie folgt zu einem Modell mit Koordinatensystem machen,fall T_7 richtig ist.Man nimmt dazu einfach die nach D49-c existierende Erweiterung,die sowohl das ge=gebene Modell,als auch das existierende Modell mit Koordinatensystem enthält.Natürlich ist diese Erweiterung dann eine Raum-Zeit-Struktur mit Koordinatensystem und in ihr kann man das ursprüngliche Modell in Koordinaten beschreiben.

Wir fassen die drei zuletzt besprochenen Verstärkungen von T_7 zusammen.

<u>D56</u> Wenn die Raum-Zeit-Theorie T_7 folgende Bedingungen erfüllt

1) T_7 hat eine starre Metrik
2) T_7 hat eine Standarduhr
3) T_7 hat ein Koordinatensystem,

so nennen wir T_7 <u>praktikabel</u>

Die praktikable Raum-Zeit-Theorie T_7 vereinigt alle bisher besprochenen Theorien.Sie ist die am Reichsten strukturierte Theorie mit endlichen Modellen,die hier behandelt wird.Die folgenden Theorien haben ausnahmslos nur unendliche Modelle.Rückblickend können wir sagen,daß sich das Prinzip,die Modelle endlich zu halten, erstaunlich weit und nur mit einem unwesent= lichen Mehr an Kompliziertheit durchhalten läßt. Wir möchten betonen,daß sich auch höhere physikalische Theorien nach diesem Prinzip rekonstruieren lassen.Wenn wir uns jetzt Theorien mit kontinuierlichen Modellen zuwenden, dann deshalb,weil es unser Ziel ist,die Partikelkinematik in der Form,in der sie bereits rekonstruiert vorliegt,zu erreichen.

Ein erster Schritt in Richtung auf dieses Ziel besteht darin,T_7 umzuformen in eine äquivalente Theorie,in der jedoch unendlich viele Zeitpunkte in einem Modell zugelassen sind.Angesichts des stetigen Bewegungsablaufs von Naturvorgängen ist man bei der Zeit noch am ehesten bereit,die Existenz unendlich vieler Zeitpunkte als gegeben zu akzeptieren.Wir definieren zunächst einen Hilfsbegriff.

<u>D57</u> $[T,\prec,D]$ ist eine <u>kontinuierliche Zeitordnung</u> gdw

1) $T \in \mathfrak{M}$
2) $\prec$ ist eine lineare Ordnung auf T
3) $\forall t,t' \in T\, \exists t'' \in T(t \prec t' \rightarrow t \prec t'' \prec t')$
4) $\forall T_1,T_2 \subseteq T(T_1 \cap T_2 = \emptyset \wedge T_1 \cup T_2 = T \wedge \forall t_1,t_2 (t_1 \in T_1 \wedge t_2 \in T_2 \rightarrow t_1 \prec t_2) \rightarrow \exists t \in T\, \forall t_1 \in T_1 \setminus \{t\} \forall t_2 \in T_2 \setminus \{t\}(t_1 \prec t \prec t_2))$
5) $D: T \rightarrow \mathbb{R}$
6) $\forall t,t' \in T(t \prec t' \leftrightarrow D(t) < D(t'))$

Eine kontinuierliche Zeitordnung ist das Äquivalent zur Zeit-Theorie T_4. Alle dort wirksamen Bestimmungen sind in D57 zusammengefaßt. In Analogie zur Raum-Zeit-Theorie T_7 definieren wir nun die kontinuierliche Raum-Zeit-Theorie T_8 wie folgt.

<u>D58</u> Die <u>kontinuierliche Raum-Zeit-Theorie T_8</u> wird wie folgt definiert

$T_8 := [K_8, I'_{RZ}]$ mit

1) $K_8 = [M^8_{pp}, M^8_p, M^8, C^8]$
2) $x \in M^8_{pp}$ gdw $x = [P,G,E,\in,Z,K,T,\prec]$ und
2.1) $P,G,E \in \mathfrak{M}$ sind endlich und disjunkt
2.2) $T \in \mathfrak{M}$
2.3) $\in \subseteq T \times P \times (G \cup E)$
2.4) $Z \subseteq T \times P^3$
2.5) $K \subseteq T \times P^4$
2.6) $\prec \subseteq T \times T$
3) $x \quad M^8_p$ gdw $x = [y,d]$ und
3.1) $y \in M^8_{pp}$

3.2) $d: P \times P \times T \to \mathbb{R}$

4) $x \in M^8$ gdw

4.1) $x \in M_p^8$

4.2) $\forall t \in T$(x_t ist eine Figur)

4.3) $\forall a,b \in P$($[T, \prec, d(a,b,\cdot)]$ ist eine kontinuierliche Zeitordnung)

5) $C^8 := C_1 \cap C_3$

6) I'_{RZ} ist gemäß den Ausführungen im Anschluß an D50 festgelegt, nur daß dabei überall unendlich viele Zeitpunkte zugelassen werden

Der einzige Unterschied zu T_7 ist, daß dort die Forderungen der Dichte und Stetigkeit der Zeitordnung in die Constraints gelegt war, während sie hier in D50-4.3 zu finden sind. Offenbar sind T_7 und T_8 in einem leicht zu präzisierenden Sinn äquivalent.

IX PARTIKELKINEMATIK

In diesem letzten Abschnitt gelangen wir wie vorgesehen zur Partikelkinematik.Es war unser Ziel,diesen Begriff so,wie er sich in der Literatur findet,vorzugeben und auf Begriffe tieferliegender Theorien zurückzuführen.
Eine Partikelkinematik ist nach (13) wie folgt definiert.

<u>D59</u> Eine <u>Partikelkinematik</u> ist ein Tripel [P,T,s] mit folgenden Eigenschaften

1) $P \in \mathfrak{M}$ ist endlich
2) Int(T)
3) $s : P \times T \to \mathbb{R}^3$
4) $s \in \mathcal{C}^2$

Es handelt sich also um eine Menge P von Partikeln,zusammen mit einer Funktion,die jedem Partikel zu jedem Zeitpunkt $t \in T$ einen Vektor des dreidimensionalen reellen Zahlenraums zuordnet.Die Komponenten dieses Vektors sind die Koordinaten des Punktes.Die Funktion s heißt Ortsfunktion.

Es fragt sich,was an diesem Begriff denn überhaupt auf tieferliegende Theorien zurück=führbar ist.In D59 wird ja fast nur über mathematische Begriffe geredet.Aber sicher soll doch der Begriff der Partikelkinematik im Rahmen der empirischen Wissenschaft "Physik" verwandt werden,er soll sogar ein Grundbegriff sein.Entweder beschäftigen sich die Physiker also mit mathematischen Objekten oder die Partikelkinematik hat eine noch ungeklärte nicht-mathematische Bedeutung. Natürlich ist Letzteres der Fall und aus unserem Kommentar zu D59 läßt sich schon sehen, wie die mathematischen Objekte mit der Realität zu= sammenzubringen sind. Die reellen Zahlen $t \in T$ stehen für Zeitpunkte, die reellen Vektoren von $\mathbb{R}^3$ stehen für "Orte von Dingen". Ersetzt man "stehen für" durch "repräsentieren", so wird die letzte Aussage nur auf den ersten Blick weniger vage. Genau in welcher Weise repräsentieren reelle Zahlen Zeitpunkte? Die Antwort hierauf ist im Detail durch alle unsere Definitionen gegeben, im Groben lautet sie etwa: Die reellen Zahlen zusammen mit geeigneten Relationen spiegeln in einem präzisierbaren (und in der Tat von uns präzisierten) Sinn die logische Struktur von Zeitpunkten und <u>relevanten</u> Relationen zwischen diesen wider.

Unsere Erwartungen bezüglich des Ver= hältnisses zwischen Partikelkinematik und der tieferliegenden Theorie, auf der sie auf= baut, seien vorab geklärt. Wenn wir mit M ein Modell dieser vorausgesetzten zugrundeliegenden Theorie bezeichnen, so lassen sich die beiden folgenden Bedingungen als Adäquatheitskriterien ansehen.

1) In M gibt es Partikel $\tilde{p} \in P$ und Zeitpunkte $\tilde{t} \in T$, die ontologisch keine reellen Zahlen sind.

2) Es gibt eine injektive Abbildung
$J: P \times T \rightarrow \mathbb{R}^4$
sodaß

2.1) J_4 die Zeitpunkte repräsentiert

2.2) $[J_1, J_2, J_3]$ die Orte repräsentiert

Dies ist eine minimale Forderung,die besagt, daß man das reale Modell in der mathematischen Struktur $\mathbb{R}^4$ beschreiben kann.

Wir geben nun zwei verschiedene Möglich=keiten an,wie man aus Raum-Zeit-Theorien zu einer Partikelkinematik kommen kann.Die erste Möglichkeit ist die der Definition einer Orts=funktion unter Voraussetzung der Gültigkeit der empirischen Behauptung einer Raum-Zeit-Theorie.Hierbei wird die gesamte Raum-Zeit-Theorie mit Constraints verwandt,um eine einzige Partikelkinematik zu definieren.
Die zweite Möglichkeit ist die der Einführung der Ortsfunktion als theoretischer Größe.
Hierbei wird,ausgehend von einer Raum-Zeit-Struktur S,eine Partikelkinematik als theoretische Ergänzung von S gewonnen.Auf diese Weise kommt man von der Raum-Zeit-Theorie zu einer Theorie der Partikelkinematik im Sinne von D6.

Wir wenden uns der ersten Möglichkeit zu.

<u>D60</u> Es sei $X \in \mathbb{M}(T_7)$, $S=[P,G,E,\lessdot,Z,K,T^e,\prec,d]$ $\in X$ und $\{a_1,..a_4\}$ ein Koordinatensystem für S.

a) $T_X := \{t / \exists S' \in X(t \in (T^e)' \wedge \min(T^e) \in (T^e)' \wedge \max(T^e) \in (T^e)' \wedge \min(T^e) \prec' t \prec' \max(T^e))\}$

b) $P_X := \bigcup \{P / \exists S' \in X(pr_1(S')=P)\}$

c) Für $a,b,t \in S' \in X$ sei $\alpha'_t(a,b)$ die nach D13 eindeutig bestimmte Gerade α von S'_t mit $a,b <_t \alpha$

d) Sei $t \in T_X, i \in \{1,2,3\}$ und $a \in P$.

$s_i(a,t) := \iota x A(x)$,wobei $A(x)$ die folgende Formel ist: $A(x) \equiv \exists S' \in X \exists b' \in P'(a,a_1,a_i \in P'_t \wedge b' <'_t \alpha'_t(a_1,a_i) \wedge d'(a,a_1,t)^2 = d'(a,b',t)^2 + d'(a_1,b',t)^2 \wedge d'(b',a_1,t)=x)$

e) Für $t,t' \in T_X$ gelte $t \prec_X t'$ gdw $\exists S' \in X(t,t' \in (T^e)' \wedge t \prec' t')$

f) Für $t \in T_X$ und $a,b \in P_X$ sei $d_X(a,b,\cdot):T_X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$d_X(a,b,t)=x \leftrightarrow \exists S' \in X(a,b,t \in S' \wedge d'(a,b,t)=x)$

T_X ist die Menge aller Zeitpunkte,die in den Strukturen von X vorkommen und zwischen $\min(T^e)$ und $\max(T^e)$ liegen.Genauso ist P_X die Menge aller Punkte,die in Strukturen von X liegen.Die Bedeutung von D60-d wird im Beweis von T19 klar.Intuitiv ist das gekennzeichnete x in A(x) der Abstand zwischen dem Koordinaten= ursprung und dem von a aus gefällten Lot auf die i-te Koordinatenachse.Die Relationen $\prec$ und d von S werden durch D60-e und f) auf T_X und P_X fortgesetzt.

Diese Definition stellt das Analogon zur Definition von Γ_α dar.Die Elemente einer Menge von Raum-Zeit-Strukturen,die den Constraint C^7 erfüllen,werden in geschickter

Weise so vereinigt,daß die Vereinigung die vorher durch die Constraints ausgedrückten Forderungen erfüllt.Wir erhalten:

T17 Sind a',b' die nach D49-b existierenden Partikel in P_X,so gilt
$[T_X, \prec_X, d_X(a',b',\cdot)]$ ist eine kontinuierliche Zeitordnung

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von T6 und ist ziemlich kompliziert. Wegen D49-c ist $d_X(a',b',\cdot)$ wohldefiniert.Daß $\prec_X$ eine lineare,dichte und stetige Ordnung ist,beweist man unter Benutzung der Definitionen D49-b,c und D47-3.Auch die Bedingung D57-6 läßt sich durch Auffinden geeigneter Erweiterungen beweisen.Da der Beweis lang und für wissenschaftstheoretische Fragen uninteressant ist,und da weiterhin die Beweismethode in T6 vorgeführt wurde,verzichten wir auf eine genaue Ausführung.

T18 Sind a',b' die nach D49-b existierenden Partikel,so gilt mit den Bezeichnungen von D60

a) $Int(\{d_X(a',b',t)/t \in T_X\})$

b) $d_X(a',b',\cdot):T_X \to \{d_X(a',b',t)/t \in T_X\}$ ist bijektiv

Beweis: a) Man setzt $y:=d_X(a',b',min(T^e))$ und $z:=d_X(a',b',max(T^e))$ und zeigt,daß das offene Intervall $]y,z[$ gleich der gegebenen Menge ist. Dieser Beweis ist aus der Mathematik bekannt und besagt, daß die topologischen Eigenschaften der reellen Zahlen durch lineare Ordnung, Dichte und Stetigkeit vollständig ausdrückbar sind. Wir verzichten auch hier auf eine genaue Ausführung des länglichen Beweises. b) folgt aus a) und T15.

Nach T18 werden die in Strukturen von X vorkommenden Zeitpunkte ein-eindeutig auf ein Intervall der reellen Zahlen abgebildet. Dieses Intervall wird als Definitionsbereich der Ortsfunktion dienen.

<u>D61</u> Sind X, S, $a_1, \ldots, a_4$ und a', b' wie in D60 und D49-b gegeben, so setzen wir fest:

a) $T := \{d_X(a', b', t) / t \in T_X\}$

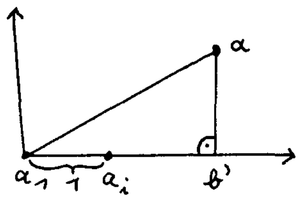
b) $d_X^{-1}(a', b') : T \to T_X$ sei die nach T18-b existierende Umkehrfunktion von $d_X(a', b', \cdot)$

Der folgende Satz zeigt die Zulässigkeit von D60-d.

<u>T19</u> $\exists! x \in \mathbb{R}\, (A(x))$, wobei A(x) die in D60-d benutzte Formel ist

Beweis: Wir benutzen T6. Nach D49-a und T6 bildet für $t \in T_X$ die durch die Menge $\mathfrak{A}$ aller t-Schnitte von Strukturen aus X gegebene Struktur $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ eine Geometrie. In $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ gibt es nach Sätzen der Geometrie ein eindeutig bestimmtes x mit der Eigenschaft A(x). A(x) besagt nämlich folgendes (siehe Figur 6).

Figur 6



Es gibt ein b' auf der durch a_1 und a_i bestimmten Koordinatenachse, sodaß für das Dreieck $a_1b'a$ der Satz des Pythagoras gilt, d.h. die Gerade $\alpha(a,b')$ steht senkrecht auf $\alpha(a_1,b')$. b' ist sogar eindeutig bestimmt und damit auch der Abstand x zwischen a_1 und b'. Wir suchen nun eine geeignete Struktur $S' \in X$, die x und alle sonst benötigten Punkte und Zeitpunkte enthält. S' ist dann die in $A(x)$ benötigte Raum-Zeit-Struktur.

Nach diesen Vorarbeiten können wir nun unter den bisherigen Voraussetzungen eine Ortsfunktion definieren.

<u>D62</u> Sind X,S, $a_1,..,a_4$ und a',b' wie in D61 gegeben, so definieren wir

$$s(a,t) := [\, s_1(a,d_X^{-1}(a',b')(t)), s_2(a,d_X^{-1}(a',b')(t)), s_3(a,d_X^{-1}(a',b')(t)))] \text{ für } a \in P, t \in T$$

Da die s_i keine Zahlen, sondern Zeitpunkte als Argumente haben, müssen wir hier die Funktion $d_X^{-1}(a',b')$ benutzen, die die reellen Zahlen aus T ein-eindeutig auf die Zeitpunkte von T_X abbildet.

Wir haben so, unter der Voraussetzung, daß $X \in \mathfrak{M}(T_7)$, zu einer gegebenen Raum-Zeit-Struktur S mit Koordinatensystem eine Ortsfunktion definiert. Diese Definition macht wesentlich davon Gebrauch, daß der Constraint C^7 erfüllt ist. Wenn die empirische Behauptung von T_7 richtig ist, also wenn $I_{RZ} \in A(K_7)$, so gibt es

$X \in \mathbb{M}(T_7)$ mit $\bar{r}(X)=I_{RZ}$.Die hier angegebene Definition der Ortsfunktion funktioniert also,wenn die Raum-Zeit-Theorie T_7 richtig ist.Formal können wir D60,D61 und T18,T19 zusammenfassen in

<u>T20</u> Ist $X \in \mathbb{M}(T_7), S \in X, \{a_1,..,a_4\}$ ein Koordinatensystem für S und ist s gemäß D62 definiert,so gilt
$s:P \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$

Wir bemerken,daß s zwar eine Funktion der ge= wünschten Art ist,aber nach den bisherigen Ausführungen nicht $s \in \mathcal{C}^2$ gelten muß.Es scheint uns auch nicht sinnvoll,in der Raum-Zeit-Theorie T_7 Forderungen an die Metrik zu stellen,sodaß die hier definierte Orts= funktion s $\mathcal{C}^2$ wird.Solche Forderungen wären zwar formulierbar,wenn man einen außer= ordentlich komplizierten mengentheoretischen Apparat aufbaut und an die Constraints starke Zusatzforderungen stellt.Schaut man aber auf die relative Einfachheit und Eleganz der Formulierung von $s \in \mathcal{C}^2$,wie sie in der Analysis üblich ist,so entschließt man sich leicht, diese Forderung erst an dieser Stelle,nachdem die Ortsfunktion als reelle Funktion mit reellen Argumenten definiert ist,aufzustellen.

Soweit die erste Möglichkeit der Einführung der Ortsfunktion.Vom Standpunkt der Hierarchien= bildung aus läßt sich der vorliegende Prozeß des Aufeinanderbauens von Theorien wie folgt beschreiben.Die partiellen potentiellen

Modelle der höheren Theorie sind durch die Begriffe der tieferliegenden Theorie definierbar, falls die empirische Behauptung der tieferliegenden Theorie richtig ist. Wegen dieser letzten Klausel erscheint die vorliegende Lösung für die Hierarchienbildung nicht sehr geeignet: Die Konstruktion oder auch nur die logische Rekonstruktion einer Theorien-Hierarchie darf nicht davon abhängen, ob irgendwelche Glieder in der Hierarchie "wahre" empirische Theorien sind. Auch wenn alle betrachteten Theorien empirisch unhaltbar sind, sollte man rekonstruieren können, wie sich Begriffe der höheren Theorie auf Begriffe der tieferliegenden Theorie zurückführen lassen.

Aus diesem Grund gehen wir nach dem nächsten, abschließenden Satz zur zweiten Möglichkeit der Einführung der Ortsfunktion über.

T21 Mit den Bezeichnungen von D60 gilt

a) $s(a_1,t)=\vec{o}$ für alle $t \in T$

b) $s(a_i,t)=\mathcal{W}_{i-1}$ für $i=2,3,4$ und $t \in T$

Beweis: a) Beim Beweis von T19 benutzten wir T6. Für $a=a_1$ wird dabei auch das b' im Beweis von T19 gleich a_1, woraus die Behauptung folgt. b) beweist man analog unter Berücksichtigung von D55-a.4.

T21 besagt, daß die Ortsfunktion s die Partikel $a_1,..,a_4$, welche das Koordinatensystem konstituieren, auch an die Orte abbildet, an die sie hingehören, d.h. genauer: auf die Vektoren, welche die angesprochenen Orte in $\mathbb{R}^3$ re= präsentieren.

Wir versuchen nun, die Partikelkinematik als Theoretisierung im Sinne von D8 der Raum-Zeit-Theorie T_7 einzuführen. Dazu gehen wir aus von einer Raum-Zeit-Struktur S mit Koordinatensystem, deren Begriffe wir als nicht-theoretisch betrachten. Zu S werden dann das Intervall T und die Ortsfunktion s als theoretische Begriffe hinzugenommen. Das Inter= vall T können wir dabei als theoretische Ergänzung von T^e auffassen (vergleiche D8-3). Die Ortsfunktion s wird mit der vorgegebenen Abstandsfunktion $d(\cdot,\cdot,t)$ durch eine Gleichung verknüpft, die besagt, daß zum Zeitpunkt $t \in T^e$ der Abstand zweier Punkte gleich dem Abstand der Ortsvektoren dieser Punkte ist (D63-4.3). Die so erhaltenen Modelle der Partikelkinematik werden dann durch den (=,=)-Constraint für s und einige Zusatzbedingungen zu einer Theorie in Sinne von D6 vervollständigt.

<u>D63 Die Theorie der Partikelkinematik T_9</u> wird wie folgt definiert

1) $T_9 := [K_9, I_{PK}]$, $K_9 := [M^9_{pp}, M^9_p, M^9, C^9]$ und

2) $x \in M^9_{pp}$ gdw $x = [P, G, E, \lessdot, Z, K, T^e, \prec, d]$ und

2.1) x ist eine Raum-Zeit-Struktur

2.2) Es gibt $a_1, .., a_4 \in P$, sodaß $\{a_1, .., a_4\}$ ein Koordinatensystem für x ist

3) $x \in M^9_p$ gdw $x = [y, T, s]$ und

3.1) $y \in M^9_{pp}$

3.2) $Int(T)$

3.3) $s: P \times T \to \mathbb{R}^3$

3.4) Falls a', b' D47-3 erfüllen, so gilt
$d(a', b', t) \in T$ für alle $t \in T^e$

3.5) $\forall a, b \in P \, \forall t \in T (s(a,t) = s(b,t) \to a = b)$

4) $x \in M^9$ gdw $x \in M_p^9$ und für $a', b' \in P$ gemäß D47-3 gilt

4.1) $\forall t \in T^e (s(a_1, d(a', b', t)) = \vec{o}\,)$

4.2) $\forall t \in T^e \, \forall i = 2,3,4 (s(a_i, d(a', b', t)) = \mathfrak{w}_{i-1})$

4.3) $s \in \mathfrak{C}^2$

4.4) $\forall a, b \in P \, \forall t \in T^e$
$(\| s(a, d(a', b', t)) - s(b, d(a', b', t)) \| = d(a, b, t))$

5) C^9 ist der (=,=)-Constraint auf M_p^9 für s

6) I_{PK} ist die Menge der intendierten
Anwendungen der Partikelkinematik

Bedingung 3.4 ist rein technischer Natur und verlangt, daß das Intervall T so gewählt wird, daß es alle Zahlen, welche Zeitpunkte re= präsentieren, enthält. 3.5 verlangt, daß zur Zeit t nur ein einziges Teilchen am Ort $s(a,t)$ sein kann. 4) versteht man am Besten wie folgt. Die Zeitrepräsentationsfunktion $d(a', b', \cdot)$ bildet die Zeitpunkte von T^e ein-eindeutig ab auf Zahlen in T. Wir können daher für einen Moment diese Zahlen $d(a', b', t), t \in T^e$ mit den Zeitpunkten $t \in T^e$ identifizieren. Dann be= sagen 4.1 und 4.2, daß $s(a_1, t) = \vec{o}$ und $s(a_i, t) = \mathfrak{w}_{i-1}$ für alle Zeitpunkte $t \in T^e$ und $i = 2,3,4$. Das heißt, daß das Koordinatensystem $\{a_1, .., a_4\}$

"richtig" in den $\mathbb{R}^3$ abgebildet wird. 4.4 heißt dann,daß

$$\|s(a,t)-s(b,t)\| = d(a,b,t)$$

d.h.daß der Abstand zwischen je zwei Punkten a,b zur Zeit $t \in T^e$ gleich dem "euklidischen Abstand" der zu a und b gehörigen Ortsvektoren s(a,t) und s(b,t) in $\mathbb{R}^3$ ist.Da s im zweiten Argument auf reelle Zahlen angewendet wird, mußten wir die Zeitpunkte $t \in T^e$ durch die sie repräsentierenden Zahlen $d(a',b',t)$ ersetzen.

Zur Menge I_{PK} brauchen wir nicht viel zu sagen.Aus der Physik sind die Standard-Beispiel bekannt.Auch die Wissenschaftstheorie hat sich mit der Partikelmechanik und deren Anwendungen schon länger beschäftigt.Hierdurch ist auch die Menge der intendierten Anwendungen der Partikelkinematik bestimmt worden.

Die Modelle von T_9 bezeichnen wir als Partikelkinematiken.Genau genommen ist das Koordinatensystem $\{a_1,..a_4\}$ nicht nötig.D63 bleibt auch sinnvoll,wenn wir das Koordinaten=system weglassen.Intuitiv geschieht ja durch die Einführung von T und s folgendes.Die Zeit=punkte $t \in T^e$ werden eingebettet in das Intervall T (D63-3.4).Die Orte der Partikel zu den Zeiten $t \in T^e$ (die in S nicht explizit auftreten) werden eingebettet in den $\mathbb{R}^3$ .Die einzigen Forderungen an diese Einbettungen sind,daß sie "Zeitordnungstreu" und "Abstandstreu" sein sollen."Zeitordnungs=treue" besagt einfach,daß die Kleinerrelation in T die Zeitordnung $\prec$ von S widerspiegelt (vergleiche D37-3).Die zeitordnungstreue Einbettung wird geleistet durch die Funktion d(a',b',·),wobei a',b' D47-3 erfüllen müssen. "Abstandstreue" heißt,daß die durch d ge=gebenen Abstände der Partikel auch nach der Einbettung der Orte der Partikel in $\mathbb{R}^3$ noch gelten und zwar zu jedem "Zeitpunkt" d(a',b',t) mit $t \in T^e$.Die erste Forderung ist in D47-3 und D63-3.4 enthalten,die zweite Forderung in D63-4.Diese Bedingungen allein gewähr=leisten schon,daß D63 eine adäquate Ein=führung der Ortsfunktion darstellt.Bei der Einbettung der Orte in $\mathbb{R}^3$ herrscht dabei völlige Freiheit bezüglich der Richtung der Koordinatenachsen und der Lage des Koordinaten=ursprungs relativ zum betrachteten Partikel=system.Eine Einbettung J ist hier genauso gut wie eine Translation oder Rotation von J.In diesem Sinn kann man sagen,daß das durch den $\mathbb{R}^3$ gegebene Koordinatensystem "in der Luft" hängt.Wir haben es in D63 an den vier Partikeln $a_1,..,a_4$ "festgemacht".In der Praxis wird das Koordinatensystem ja auch nicht be=liebig,sondern so gewählt,daß die Achsen und der Ursprung in der Realität festgelegt sind. Eine solche Festlegung kann,wie bereits be=sprochen,durch vier Partikel geschehen.Gemäß D63-4.1 und 4.2 darf die Einbettung J der Orte der Partikel in den $\mathbb{R}^3$ nicht mehr völlig willkürlich durchgeführt werden,vielmehr ist die Wahl der Koordinatenachsen und des Koordinatenursprungs festgelegt.

Die Einführung der Ortsfunktion mittels D63 hat gegenüber der vorher durchgeführten Definition von s zwei Vorteile. Erstens geht man aus von einer einzelnen Raum-Zeit-Struktur S und nimmt zu dieser s als theoretische Größe hinzu. Man braucht also nicht die Richtigkeit von T_7 vorauszusetzen. Zweitens hat der Übergang von T_7 zu T_9 die in D8 festgelegte Struktur der Theoretisierung. Dieser Übergang kann also aufgefaßt werden als <u>ein</u> Schritt im Aufbau einer Hierarchie von Theorien. Wir halten dies genauer fest.

<u>T22</u> T_9 ist eine Theoretisierung von T_7

Beweis: M_p^7 ist eine 8+1-Matrix und M_p^9 ist eine 8+3-Matrix. Für $x=[P,G,E,\lessdot,Z,K,T^e,\prec,d,T,s] \in M_p^9$ definieren wir $\delta(x):=[P,G,E,\lessdot,Z,K,T^e,\prec,d] \in M_p^7$. Nach D63-4 ist dann D8-2b erfüllt. Zur Verifikation von D8-3 müssen wir die Komponenten x_i von $x \in M^9$ betrachten, für die $i > 8$ ist und die Objektmengen sind. Hierfür kommt nur $x_{10}=T$ in Frage. Wir haben zu zeigen: Es gibt $i \leq 8$, sodaß $Ob(x_i)$ und es gibt J, sodaß $J:x_i \hookrightarrow T$. Für i=7 gilt: $x_i=T^e$, also $Ob(x_i)$. Da $x \in M^9$, gilt $\delta(x) \in M^7$ und daher nach D47-3: Es gibt $a,b \in P$, sodaß $[T^e,\prec,d(a,b,\cdot)]$ eine metrisierte Zeitordnung ist. Mit $J(t):=d(a,b,t)$ für $t \in T^e$ folgt dann die Behauptung nach T15.

Als weiteres Ergebnis können wir feststellen, daß T_9 die am Anfang dieses Abschnitts formulierten Adäquatheitsbedingungen 1) und 2) erfüllt.

<u>T23</u> Ist $X=[S,T,s]$ ein Modell von T_9, sind a',b' zwei nach D47-3 existierende Partikel von S und ist $J:P\times T^e \to \mathbb{R}^4$ definiert durch $J(a,t):=[s(a,d(a',b',t)),d(a',b',t)]$,so gilt

1) J ist injektiv
2) $J_4:P\times T^e \to \mathbb{R}$ repräsentiert die Zeitpunkte von S
3) $[J_1,J_2,J_3]:P\times T^e \to \mathbb{R}^3$ repräsentiert die Orte der Partikel von S

Beweis: Nach T15 ist $d(a',b',\cdot)$ injektiv,also auch J_4.Für $[a,t]\neq[b,t']$ gilt $a\neq b$ oder $t\neq t'$. Erster Fall: $t\neq t'$. Dann ist $J_4(a,t)\neq J_4(a,t')$ für jedes $a\in P$.Zweiter Fall: $t=t'$.Dann muß $a\neq b$ gelten und daher nach D63-3.5: $J(a,t)\neq J(b,t')$.Also ist J injektiv.
2) ist eine Umschreibung von D37-3 und wegen $X\in M^9$ erfüllt. 3) bedeutet,daß für jeden Zeitpunkt $t\in T^e$ $J':[J_1,J_2,J_3](\cdot,t):P \to \mathbb{R}^3$ eine injektive und abstandstreue Funktion ist.
Die Injektivität folgt aus D63-3.5."Abstandstreu" bedeutet:
$\forall a,b\in P\,\forall x(d(a,b)=x \leftrightarrow d'(J'(a),J'(b))=x)$
Dabei ist d' in $\mathbb{R}^3$ als euklidischer Abstand gemäß D1-24 definiert.Die Abstandstreue von J' folgt nun aus D63-4.4.

Schließlich bemerken wir noch,daß,wie in allen bisherigen Fällen auch,die theoretische Größe s nicht durch die nicht-theoretischen Größen definiert werden kann,daß jedoch umgekehrt d durch s definierbar ist.

<u>T24</u> a) Ist $Y=[S,T,s]$ eine Partikelkinematik, so ist d durch s definierbar

b) Ist S eine Raum-Zeit-Struktur,so gibt es T und $s_1 \neq s_2$,sodaß $[S,T,s_1]$ und $[S,T,s_2]$ Partikelkinematiken sind

Beweis: a) Ist s gegeben und sind $a,b \in P$ und $t \in T^e$,so definiert man
$d(a,b,t) := \| s(a,d(a',b',t)) - s(b,d(a',b',t)) \|$,
wobei a',b' D47-3 erfüllen. b) Wir wählen T so,daß $d(a',b',t) \in T$ für alle $t \in T^e$,wobei wieder a',b' gemäß D47-3 gewählt sind.Zu $a \in P$ be= rechnet man aus den gegebenen Zahlen $d(a,a_i,t)$ $(i=1,..,4$,$\{a_1,..,a_4\}$ sei das Koordinatensystem) die kartesischen Koordinaten von a und erhält so endlich viele Vektoren $s_a(t), t \in T^e$ in $\mathbb{R}^3$. Aus der Analysis weiß man,daß es eine Funktion $f_a: T \to \mathbb{R}^3$ gibt,sodaß $f_a(d(a',b',t)) = s_a(t)$ für alle $t \in T^e$ gilt.Definieren wir $s_1: P \times T \to \mathbb{R}^3$ durch $s_1(a,t) := f_a(t)$,so ist $[S,T,s_1]$ eine Partikelkinematik.Sind nun t und t' in T^e so, daß kein weiterer Zeitpunkt zwischen t und t' liegt,so können wir s_1 im offenen Intervall $]d(a',b',t), d(a',b',t')[$ beliebig zu einer anderen $\mathcal{C}^2$-Funktion s_2 deformieren.Dann ist auch $[S,T,s_2]$ eine Partikelkinematik,aber $s_1 \neq s_2$.

Es ist für den Beweis unwesentlich,in beiden Fällen das gleiche Zeitintervall T zu wählen. Man kann auch T abändern.

Die Untersuchung der neueingeführten Größen T und s in Bezug auf ihre Theoretizität führt zu folgenden ersten Resultaten.Zunächst ist

T keine Funktion,das Sneedsche Kriterium ist daher auf T nicht anwendbar.Man könnte ver=suchen,es auf Objekte in folgender Weise auszudehnen.Jede Methode,herauszufinden, ob ein bestimmtes Objekt zu T gehört,setzt voraus,daß die Theorie bereits erfolgreich angewandt wurde.Die Feststellung,ob ein Objekt zu T gehört,besteht darin,das fragliche Objekt als reelle Zahl innerhalb eines Intervalles auszuweisen.Es ist nicht zu sehen,wieso man hierzu T_9 schon erfolgreich angewandt haben muß.Man kann diese mit Objekten verbundene Schwierigkeit umgehen, indem man T nur als Definitionsbereich von s auffaßt und als zu s gehörig betrachtet. In diesem Fall werden T und s als eine einzige Größe betrachtet.

Will man einen Funktionswert s(a,t) er=mitteln,so kommen zwei Möglichkeiten in Betracht.Erster Fall: t ist das Bild eines Zeitpunktes t' unter der Zeitrepräsentations=funktion $d(a',b',\cdot)$,also $t=d(a',b',t')$ mit $t'\in T^e$. Dann läßt sich s(a,t) aus den Abständen $d(a,a_i,t')$ berechnen ($\{a_1,\ldots,a_4\}$ sei hier wieder das benutzte Koordinatensystem). Zur Ermittlung dieser Abstände muß man nur einen Teil von T_9,nämlich die Geometrie, voraussetzen,in dem s nicht vorkommt.Da die Abstandsfunktion relativ zu T_9 nicht-theoretisch ist,wird die Ermittlung des Wertes s(a,t) auf die Geometrie zurückge=führt.Lägen ausschließlich solche Fälle vor, so wäre s nicht-theoretisch bezüglich T_9.

Nun sind aber die meisten Elemente $t \in T$ nicht von der im ersten Fall betrachteten Art,d.h. es gilt: $\neg\exists t' \in T^e (t=d(a',b',t'))$.Im Extremfall ist t eine irrationale Zahl. Messen im Sinne von durch Beobachtung nach=prüfen scheidet dann als Ermittlungsmethode aus.Wir können s(a,t) nur durch mathematische Berechnungen ermitteln,wenn wir die mathematische Form von s kennen.Es liegt also eine indirekte Meßmethode im Sinne von D26 vor.s(a,t) kann nur durch Berechnung festgestellt werden,wenn man voraussetzt, daß s schon bekannt ist,daß also die Theorie in dieser vorliegenden Anwendung bereits erfolgreich war. s ist somit T_9-theoretisch im Sinne von Sneed.

Literaturverzeichnis

(1) Adams,E.W.,Axiomatic Foundations of Rigid Body Mechanics,Unveröffentlichte Dissertation,Stanford University 1955

(2) Balzer,W.und Sneed,J.D.,Generalized Net Structures of Empirical Theories,erscheint in Studia Logica 1978

(3) Borsuk,K.und Szmielew,W.,Foundations of Geometry,Amsterdam 1960

(4) Carnap,R.,Der logische Aufbau der Welt, Dritte Auflage,Hamburg 1966

(5) Euklid,Die Elemente,Hrsg.:C.Thaer, Darmstadt 1962

(6) Heath,T.L.,A History of Greek Mathematics, Band 1 und 2,Oxford 1921

(7) Hjelmslev,J.,Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre,Danske Vid.Selsk.Mat-Fys. Medd.,Medd.8,no.11,Medd.10,no.1,Medd.19, no.12,Medd.22,no.13 und Medd.25,no.10 (1929-1949)

(8) Inhetveen,R.,Die Eindeutigkeit der Ebenen Form,Vortrag gehalten auf dem Kolloquium "Zur Struktur und Entwicklung naturwissen=schaftlicher Theorien",München 1975

(9) Krantz,D.H.,Luce,R.D.,Suppes,P. und Tversky, A.,Foundations of Measurement,New York-London 1971

(10)Kuhn,T.S.,The Structure of Scientific Revolutions,Zweite Auflage,Chicago 1970

(11)Landau,L.D.und Lifschitz,E.M.,Lehrbuch der theoretischen Physik,Band I:Mechanik, Siebte Auflage,Berlin 1970

(12) Ludwig,G.,Deutung des Begriffs "physikalische Theorie" und axiomatische Grundlegung der Hilbertraumstruktur der Quantenmechanik durch Hauptsätze des Messens,Berlin-Heidelberg-New York 1970

(13) McKinsey,J.C.C.,Sugar,A.C.und Suppes,P.C., Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics,Journal of Rational Mechanics and Analysis,Bd II,1953

(14) Moulines,C.-U.,Zur logischen Rekonstruktion der Thermodynamik,Dissertation,Universität München,1975

(15) Moulines,C.-U.,Approximation als inter=theoretische Beziehung,Unveröffentlichte Arbeit im DFG-Programm Nr.Ka 4o7/1, München 1974

(16) Przelecki,M.,The Logic of Empirical Theories, London 1969

(17) Schubert,H.,Topologie,Dritte Auflage, Stuttgart 1971

(18) Shoenfield,J.R.,Mathematical Logic,London 1967

(19) Simon,H.A.,The Axioms of Newtonian Mechanics, Philosophical Magazine,Bd 38,1947

(20) Sneed,J.D.,The Logical Structure of Mathematical Physics,Dordrecht 1971

(21) Stegmüller,W.,Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie,Band II: Theorie und Erfahrung, Erster Halbband,Berlin-Heidelberg-New York 1970

(22) Stegmüller,W.,Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie,Band II: Theorie und Erfahrung, Zweiter Halbband,Berlin-Heidelberg-New York 1973

(23) Veblen,O.,A System of Axioms for Geometry, Trans.Am.Math.Soc.,Bd 5

FUSSNOTEN

Zu D1-4 ist zu bemerken,daß wir den Begriff des Objektes nicht weiter präzisieren werden. In der axiomatischen Mengenlehre ist es seit langem der Brauch,ohne Objekte zu arbeiten,aber die Einbeziehung eines "Universums" von "konkreten" Objekten ist ohne Schwierigkeiten möglich. Ungeachtet dieser Möglichkeit betonen wir,daß wir nur die Sprache der Mengenlehre benutzen. In Letzterer können wir natürlich ein Universum durch ein bestimmtes Zeichen einführen,jedoch scheint uns eine Präzisierung des Objektbegriffs in dieser Richtung zu restriktiv.Wir verwenden den Objektbegriff in einem pragmatischen Sinn als auf eine Theorie relativiert.Für eine gegebene Theorie soll feststehen,welche ihrer Zeichen "Objekte" der Theorie und welche Relationen bezeichnen.Dabei kann es durchaus vorkommen,daß ein Objekt mengentheoretisch eine Relation ist.

Die in Abschnitt II angedeutete Intention,daß die Modelle,also die Figuren,endlich sein sollen, läßt sich formal verschärfen zu der Forderung,daß alle diejenigen Axiome der Geometrie,die in endlichen Bereichen erfüllbar sind,für die Modelle gelten sollen und nur die Axiome,die nicht im Endlichen er=füllbar sind,in die Constraints verlegt werden.Eine Rekonstruktion,die dieser Forderung gerecht wird,ist möglich,müßte sich aber von unserer Rekonstruktion unterscheiden.Es sind nämlich die Axiome 1),2),5) und 9) von D16 in endlichen Bereichen erfüllbar.Wir haben diese Axiome mit Absicht nicht für Figuren gefordert, damit auch einfache Strukturen,wie Dreiecke,bereits Modelle der Theorie sein können.